MATHEMATICA 5

PREČO NEZAČAŤ UŽ NA STREDNEJ ŠKOLE ?

Kováčová Monika, kovacova_v@sjf.stuba.sk

Prečo používať počítače vo výuke už na strednej škole?

- aké počítače ?
- aká stredná škola ?
- aký učiteľ ?

Software?

- vlastný software ?
- grafická kalkulačka ?
- výpočtové prostredie ?
- kompletná podpora vs. čiastočná podpora riešených úloh ?

Pohľad žiaka - POZITÍVA

- kontrola správnosti výpočtu
- urýchlenie výpočtu
- zlepšenie grafickej predstavivosti
- zlepšenie programátorských zručností

Pohľad žiaka - NEGATÍVA

- strata výpočtovej zručnosti
- strata motivácie ? (podobný problém ako u kalkulačky)
- zhoršenie manuálnych grafických zručností

Pohľad učiteľa - POZITÍVA

- kontrola správnosti učiteľových príprav na vyučovanie
- urýchlenie prípravy
- jednoduchšia príprava písomných prác
- jednoduchšia oprava písomných prác
- širšia variabilita pri výbere príkladov
- lepšia grafická prezentácia preberaného učiva
- možnosť prezentovať animácie, vytvárať interaktívne testy pripravovať výukové materiály distribuovateľné cez web

www.wolfram.com
www.elkan.cz

MATHEMATICA 5

RIEŠENÍM SÚ PROGRAMOVÉ SYSTÉMY

- ***MATHEMATICA***
- ***MATHCAD***
- ***MAPLE***
- ***DERIVE ...***

Ukážky použitia v 1. ročníku - mnohočleny

Určenie hodnoty mnohočlena

In[1]:= `A[t_] := 8 t^3 - 4 t^2 + 2 t + 1 / 2`

In[2]:= `A[3]`

Out[2]= $\frac{373}{2}$

In[3]:= `A[x / 2]`

Out[3]= $x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}$

In[4]:= `A[3.5]`

Out[4]= 301.5

In[5]:= `Table[A[t], {t, 0, 10}]`

Out[5]= $\left\{\frac{1}{2}, \frac{13}{2}, \frac{105}{2}, \frac{373}{2}, \frac{913}{2}, \frac{1821}{2}, \frac{3193}{2}, \frac{5125}{2}, \frac{7713}{2}, \frac{11053}{2}, \frac{15241}{2}\right\}$

In[6]:= `Table[A[t], {t, 0, 10}] // N`

Out[6]= {0.5, 6.5, 52.5, 186.5, 456.5, 910.5, 1596.5, 2562.5, 3856.5, 5526.5, 7620.5}

Ukážky použitia v 1. ročníku - mnohočleny

Úprava mnohočlenov

Pohlad tudenta-nepamätám si presne vzorec

```
In[7]:= (a + b) ^ 2 // Expand
```

Out[7]= $a^2 + 2\,b\,a + b^2$

```
In[8]:= (a + b + c) ^ 3 // Expand
```

Out[8]= $a^3 + 3\,b\,a^2 + 3\,c\,a^2 + 3\,b^2\,a + 3\,c^2\,a + 6\,b\,c\,a + b^3 + c^3 + 3\,b\,c^2 + 3\,b^2\,c$

Ukážky použitia v 1. ročníku - mnohočleny

Úprava mnohočlenov

Pohlad učitela

- chcem zostavit príklad, ktorý bude mat lahko kontrolovatelný výsledok

- chcem rýchlo skontrolovat výsledky písomky

```
In[9]:= (m^2 + m) ^2 + (m - 1) (m^2 + 1) - m^4 //
         Simplify
```

Out[9]= $3\,m^3 + m - 1$

```
In[10]:= A[t] * A[t]
```

Out[10]= $\left(8\,t^3 - 4\,t^2 + 2\,t + \frac{1}{2}\right)^2$

```
In[11]:= A[t] * A[t] // Expand
```

Out[11]= $64\,t^6 - 64\,t^5 + 48\,t^4 - 8\,t^3 + 2\,t + \frac{1}{4}$

Ukážky použitia v 1. ročníku - mnohočleny

Úprava mnohočlenov

```
In[11]:= A[t]*A[t] // Expand
```

Out[11]= $64\,t^6 - 64\,t^5 + 48\,t^4 - 8\,t^3 + 2\,t + \frac{1}{4}$

```
In[12]:= Coefficient [A[t]^2, t^4]
```

Out[12]= 48

```
In[13]:= CoefficientList [A[t]^2, t]
```

Out[13]= $\left\{\frac{1}{4}, 2, 0, -8, 48, -64, 64\right\}$

Najčastejšie riešené úlohy sú:

- vypočítanie hodnoty mnohočlena
- úprava mnohočlenov
- nájdenie koeficientu pri určenej mocnine mnohočlena
- substitúcie v mnohočlenoch
- cvičenie za účelom získať zručnosť pri úprave mnohočlenov

Ukážky použitia v 1. ročníku - mnohočleny

Delenie mnohočlenov

In[14]:=
```
(9 x^2 - 5 x^2 + 5 x - 20) / (x - 4)
```

Out[14]= $\frac{4 x^2 + 5 x - 20}{x - 4}$

In[15]:=
```
PolynomialQuotient [(9 x^2 - 5 x^2 + 5 x - 20),
  (x - 4), x]
```

Out[15]= $4 x + 21$

In[16]:=
```
PolynomialRemainder [(9 x^2 - 5 x^2 + 5 x - 20),
  (x - 4), x]
```

Out[16]= 64

In[17]:=
```
(9 x^2 - 5 x^2 + 5 x - 20) / (x - 4) // FullSimplify
```

Out[17]= $4 x + \frac{64}{x - 4} + 21$

Delenie mnohočlenov
– Úloha pre učiteľa: chcem vygenerovať veľa zadaní na písomku

In[19]:=
```
pol = Apply[Plus, Table[a[i] * x ^ i, {i, 0, 6}]]
```

Out[19]= $a(6)\,x^6 + a(5)\,x^5 + a(4)\,x^4 + a(3)\,x^3 + a(2)\,x^2 + a(1)\,x + a(0)$

In[20]:=
```
Floor[20 * Random[Real] - 10]
```

Out[20]= 2

In[24]:=
```
pol = Apply[Plus, Table[a[i] * x ^ i, {i, 0, 6}]]
Do[
 pol =
  pol /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
 {i, 0, 6}]
pol
```

Out[24]= $a(6)\,x^6 + a(5)\,x^5 + a(4)\,x^4 + a(3)\,x^3 + a(2)\,x^2 + a(1)\,x + a(0)$

Out[26]= $9\,x^6 + 5\,x^5 - x^4 + 2\,x^2 - 3\,x + 9$

Delenie mnohočlenov
– Úloha pre učiteľa: chcem vygenerovať veľa zadaní na písomku

```
In[32]:= Do[
  pol = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 4}]];
  Do[pol = pol /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
   {i, 0, 4}];
  del = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 2}]];
 Do[del = del /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
   {i, 0, 2}];

 Print[
   "vydel nasledujuce dva polynomy"]
 Print[" (", pol, " ):(", del, ")="];
  Print["vysledok je:  ",
   PolynomialQuotient[pol, del, x]];
  Print["zvysok po deleni je:  ",
   PolynomialRemainder[pol, del, x]];
  Print["-------------"], {6}]
```

vydel nasledujuce dva polynomy

$(-3x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x - 4):(7 - 7x^2) =$

vysledok je: $\frac{3x^2}{7} + \frac{5x}{7} + \frac{2}{7}$

zvysok po deleni je: $-10x - 6$

- - - - - - - - - - - - -

Delenie mnohočlenov
– Úloha pre učiteľa: chcem vygenerovať veľa zadaní na písomku

```
Do[
 vysledok = Apply[Plus, Table[a[i] * x ^ i, {i, 0, 4}]];
Do[vysledok = vysledok /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 4}];
zvysok = Apply[Plus, Table[a[i] * x ^ i, {i, 0, 2}]];
Do[zvysok = zvysok /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 2}]; delitel = Apply[Plus, Table[a[i] * x ^ i, {i, 0, 3}]];
Do[delitel = delitel /. a[i] Ž Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 3}];
 delenec = vysledok * delitel + zvysok // Simplify;

Print["vydel nasledujuce dva polynomy"];
 Print["(", delenec, " ) : (", delitel, ")="];
 Print["vysledok je:  ",
  PolynomialQuotient[delenec, delitel, x]];
 Print["zvysok po deleni je:  ",
  PolynomialRemainder[delenec, delitel, x]];
 Print["-------------"], {6}]
```

Racionálne lomené výrazy:

In[42]:=
```
vyraz = (3 x^2 - 3 x y) / (3 (x - y)^2)
```

Out[42]= $\frac{3x^2 - 3xy}{3(x-y)^2}$

In[43]:=
```
vyraz // Simplify
```

Out[43]= $\frac{x}{x-y}$

In[44]:=
```
vyraz1 = (y / (x^2 - x y) + x / (y^2 - x y)) *
   ((x^2 y + x y^2) / (x^2 - y^2))
```

Out[44]= $\frac{(y x^2 + y^2 x)\left(\frac{x}{y^2 - x y} + \frac{y}{x^2 - x y}\right)}{x^2 - y^2}$

In[45]:=
```
% // Simplify
```

Out[45]= $\frac{x+y}{y-x}$

Racionálne lomené výrazy:

In[44]:=
```
vyraz1 = (y / (x^2 - x y) + x / (y^2 - x y)) *
   ((x^2 y + x y^2) / (x^2 - y^2))
```

Out[44]=
$$\frac{(y\,x^2 + y^2\,x)\left(\frac{x}{y^2 - x\,y} + \frac{y}{x^2 - x\,y}\right)}{x^2 - y^2}$$

In[46]:=
```
vyraz1 // Expand
```

Out[46]=
$$\frac{y\,x^3}{(x^2 - y^2)(y^2 - x\,y)} + \frac{y^2\,x^2}{(x^2 - x\,y)(x^2 - y^2)} + \frac{y^2\,x^2}{(x^2 - y^2)(y^2 - x\,y)} + \frac{y^3\,x}{(x^2 - x\,y)(x^2 - y^2)}$$

In[47]:=
```
vyraz1 // Denominator
```

Out[47]= $x^2 - y^2$

In[48]:=
```
vyraz1 // Numerator
```

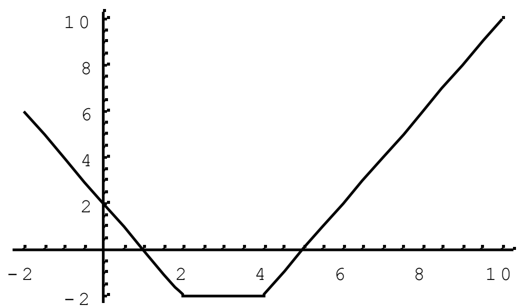
Out[48]=
$$(y\,x^2 + y^2\,x)\left(\frac{x}{y^2 - x\,y} + \frac{y}{x^2 - x\,y}\right)$$

Výrazy, rovnice s absolútnou hodnotou:

```
In[56]:= Clear [vyraz ];
         vyraz  = Abs [x - 2] - 4  + Abs [x - 4]
```

Out[57]= $|x - 4| + |x - 2| - 4$

```
In[58]:= Plot [vyraz , {x, -2, 10}, PlotRange  Ž All]
```



Out[58]= Graphics

```
In[59]:= Simplify [vyraz , x ł  4]
```

Out[59]= $2 (x - 5)$

```
In[60]:= Simplify [vyraz , 2 <= x Ł 4]
```

Out[60]= $x + |x - 4| - 6$

```
In[61]:= Simplify [vyraz , x < 2]
```

Out[61]= $|x - 4| + |x - 2| - 4$

```
In[62]:= vyraz  /. x Ž -4
```

Out[62]= 10

Rovnice s neznámou v menovateli:

In[68]:=
```
Clear [rovnica ]
rovnica = (2 x + 1) / (x - 1) + (x + 1) / (x - 1) == 11 / 2
```

Out[69]= $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x+1}{x-1} == \frac{11}{2}$

In[70]:=
```
Simplify [rovnica ]
```

Out[70]= $\frac{3x+2}{x-1} == \frac{11}{2}$

Korenom rovnice je cislo 3,
patri do definicneho oboru

In[71]:=
```
Solve [rovnica , x]
```

Out[71]= {{x Ž 3}}

In[72]:=
```
Clear [rovnica1 ]
rovnica1 = 5 + 3 / (3 x - 12) == (5 - x) / (x - 4)
```

Out[73]= $5 + \frac{3}{3x-12} == \frac{5-x}{x-4}$

Výpočtom dostaneme, že koreňom rovnice
By malo byť číslo 4 – to ale nepatrí do definičného oboru.
Výhoda: nemusíme robiť skúšku správnosti

In[74]:=
```
Solve [rovnica1 ]
```

Out[74]= {}

Riešenie nerovníc, rovnice s neznámou v absolútnej hodnote

```
In[75]:= << Algebra`InequalitySolve`

In[76]:= InequalitySolve [x / 3 - 1 / 2 > 1 / 6 + x, x]

Out[76]= x < - 1

In[77]:= InequalitySolve [Abs [x - 2] + 3 Ł 2 x, x]

Out[77]= x ł 5/3
```

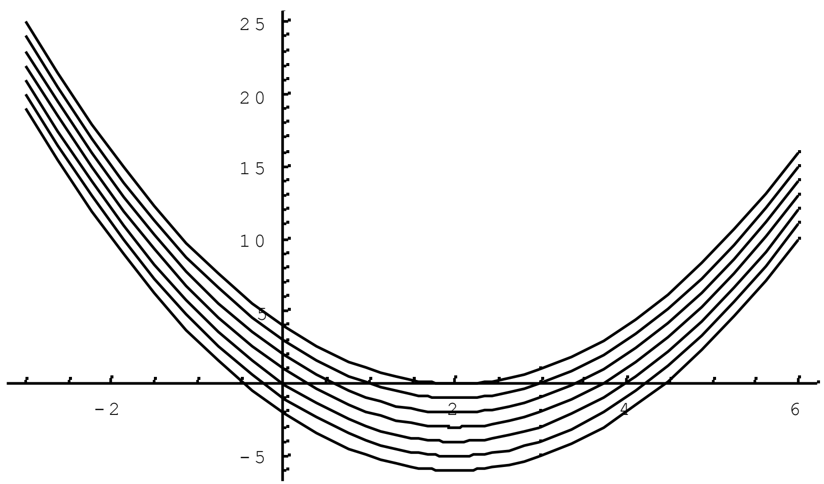
Vlastnosti kvadratickej rovnice – ako vplývajú parametre na tvar grafu

In[84]:= `f[x_, c_] := x^2 - 4 x + c`

In[85]:= `Table[f[x, c], {c, -2, 4}]`

Out[85]= $\{x^2 - 4x - 2,\ x^2 - 4x - 1,\ x^2 - 4x,\ x^2 - 4x + 1,\ x^2 - 4x + 2,\ x^2 - 4x + 3,\ x^2 - 4x + 4\}$

In[86]:= `Plot[Evaluate[%], {x, -3, 6}]`

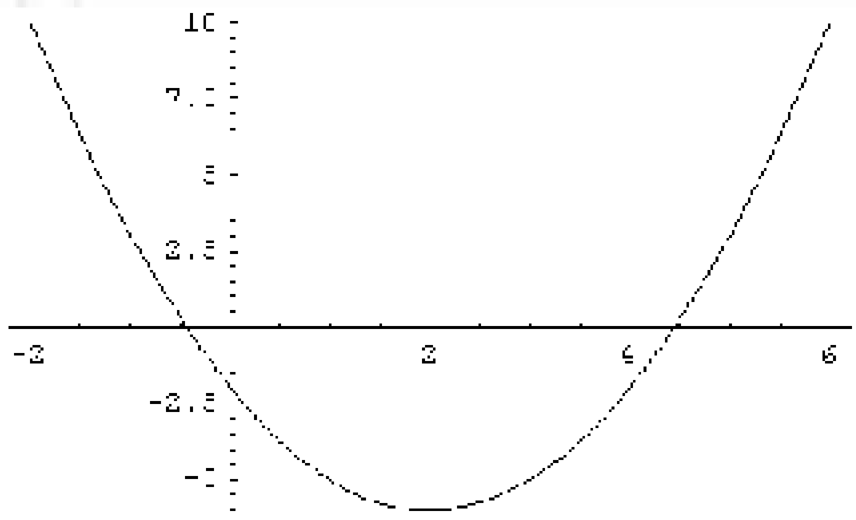


Out[86]= Graphics

Vlastnosti kvadratickej rovnice – ako vplývajú parametre na tvar grafu

```
In[87]:= << Graphics`Animation`

In[88]:= MoviePlot[f[x,c], {x, -2, 6}, {c, -2, 6, 1},PlotRange->{-7,10}]
```



Rovnice s parametrom

In[89]:=
```
Solve [Sqrt [x ^ 2 + m] == m - x, x]
```

Out[89]= $\left\{\left\{x \text{ Ž } \frac{m-1}{2}\right\}\right\}$

In[90]:=
```
Clear [rovnica ]
rovnica = Sqrt [x ^ 2 + m] == m - x
```

Out[91]= $\sqrt{x^2 + m} == m - x$

A čo kompletná analýza riešenia?

Rovnice s parametrom

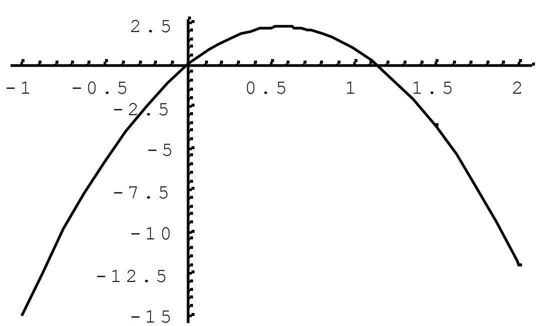
In[92]:=
```
Solve [(m - 1) x^2 - (m - 2) x + 2 m - 1 == 0, x]
```

Out[92]= $\left\{\left\{x\text{ Ž }\frac{m-\sqrt{8m-7m^2}-2}{2(m-1)}\right\},\left\{x\text{ Ž }\frac{m+\sqrt{8m-7m^2}-2}{2(m-1)}\right\}\right\}$

In[93]:=
```
diskriminant =
 InequalitySolve [8 m - 7 m^2 >= 0, m]
```

Out[93]= $0\text{ Ł }m\text{ Ł }\frac{8}{7}$

In[94]:=
```
Plot [8 m - 7 m^2, {m, -1, 2}]
```



Out[94]= Graphics

Rovnice s parametrom, kompletná analýza riešenia

```
In[95]:= InequalitySolve [{(m - 1) x ^ 2 - (m - 2) x + 2 m - 1 == 0,
  diskriminant }, {m, x}]
```

Out[95]=

$$m == 0 \land x == 1 \lor$$

$$0 < m < 1 \land \left(x == \frac{m-2}{2(m-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(m-1)^2}} \lor x == \frac{m-2}{2(m-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(m-1)^2}} \right) \lor$$

$$m == 1 \land x == -1 \lor$$

$$1 < m < \frac{8}{7} \land \left(x == \frac{m-2}{2(m-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(m-1)^2}} \lor x == \frac{m-2}{2(m-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(m-1)^2}} \right) \lor$$

$$m == \frac{8}{7} \land x == -3$$

www.wolfram.com
www.elkan.cz

MATHEMATICA 5

Pozvánka:

- geometria na strednej škole
- motivačné príklady – napr. pre výpočet konštanty Pi
- funkcie, základné vlastnosti
- limity, derivácie, priebeh funkcie
- ako vytvoriť kvíz, hru, samotestovacie demo
- step by step riešenie kvadratickej rovnice
- animácie, zmeny parametrov v rovniciach

Pozvánka – aj pre vysokoškolských učiteľov:

- základný kurz analýzy - 2 semestre (STU Bratislava)
- funkcie, základné vlastnosti, spojitosť, limita
- derivácie, step by step výpočet, aplikácie dif. počtu
- priebeh funkcie
- lineárna algebra, riešenie rovníc
- riešenie diferenciálnych rovníc
- diferenciálny počet, jednej aj viac premenných
- neurčitý a určitý integrál, jednej aj viac premenných
- numerická matematika (1 semester)
- aplikovaná matematika (1 semester)

Ale to nie je všetko –

MATHEMATICA 5 aj pre web

PRÍĎTE SA S ŇOU BLIŽŠIE ZOZNÁMIŤ !!!

SOLUTION

We begin by rewriting the quotient in the integrand as a sum.

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Then, rewriting each term using fractional exponents, we obtain

$$\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx$$
$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$$

REMARK

When integrating quotients, don't make the mistake of integrating the numerator and the denominator separately. This is no more valid in integration than it is in differentiation. For instance, in Example 4 be sure you see that

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx \neq \frac{\int(x+1)\,dx}{\int\sqrt{x}\,dx}$$

You can look for the more examples and test your ability for solving these problems.

EXERCISE

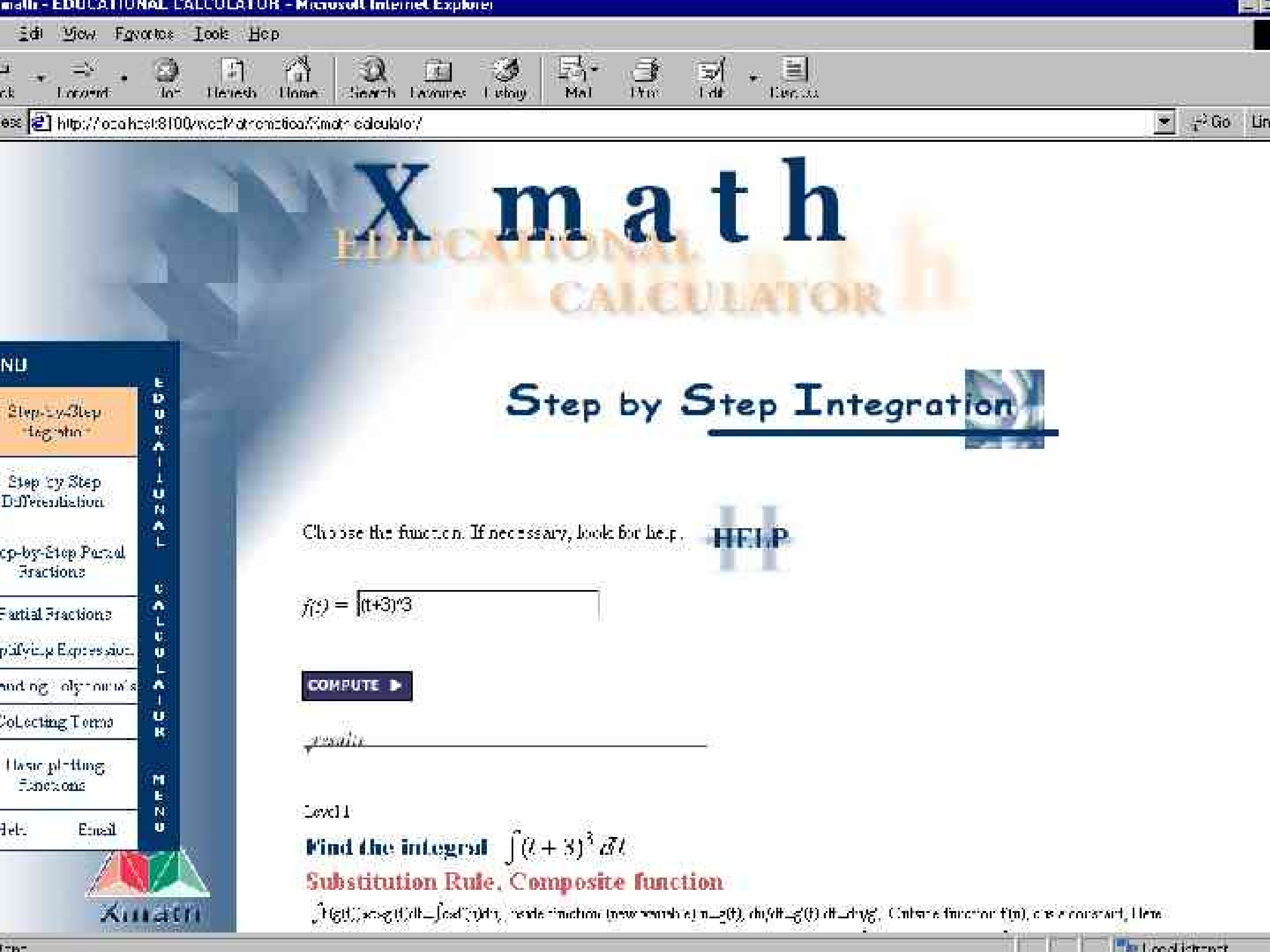
Given integral → Rewrite → Integrate → Simplify

This pattern is followed in the next examples.

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{-1/2}\,dx = 2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C = 2x^{1/2} + C$$

$$\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \frac{x^5}{5} + 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + x + C = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$$

$$\int \frac{x^3+3}{x^2}\,dx = \int (x + 3x^{-2})\,dx = \frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x} + C$$


Xmath - EDUCATIONAL CALCULATOR - Microsoft Internet Explorer
Edit View Favorites Tools Help
Forward Refresh Home Search Favorites History Mail Print Edit
Go
X math
EDUCATIONAL CALCULATOR
MENU
Step-by-Step Integration
Step by Step Differentiation
Partial Fractions
Collecting Terms
Help Email
EDUCATIONAL CALCULATOR MENU
Xmath
Step by Step Integration
Choose the function. If necessary, look for help.
HELP
f(t) =
(t+3)^3
COMPUTE
Level 1
Find the integral $\int (t+3)^3\, dt$
Substitution Rule, Composite function
Local intranet

Level 2

Find the integral $\int \sin(t)\, dt$

Sine Rule

$$\int \sin(t)\, dt = -\cos(t)$$

This gives v(t)= $-\cos(t)$, u'(t)*v(t)= $-\cos(t)$

Created by webMathematica

Level 2

Find the integral $\int -\cos(t)\, dt$

Linear Rule, Constant Factor

$\int c*f(t)dt = c\int f(t)dt$, Here c= -1 and f(t)= $\cos(t)$

Finding the integral of the non−constant factor f(t)= $\cos(t)$

Level 3

Find the integral $\int \cos(t)\, dt$

Cos Rule

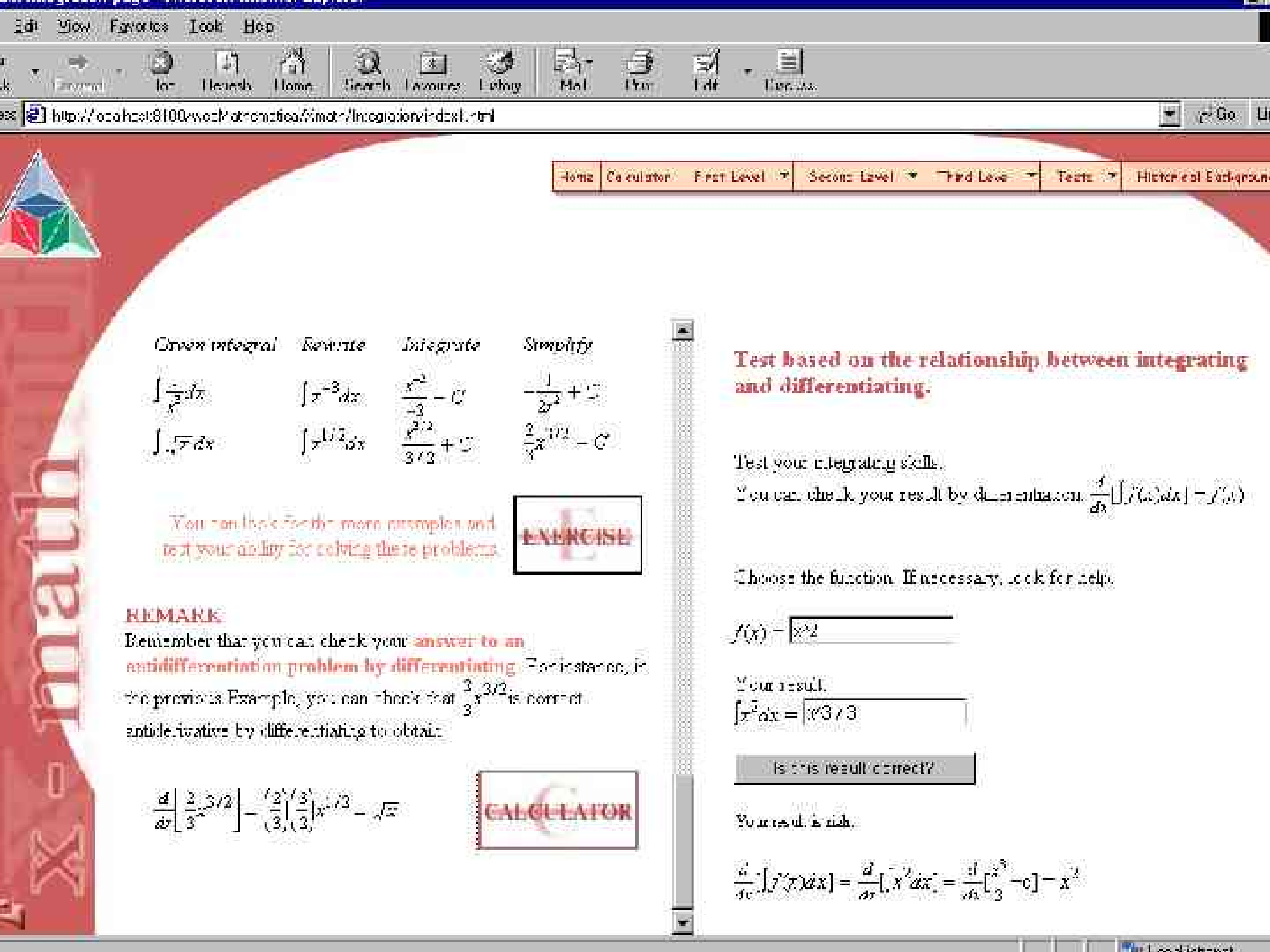
$$\int \cos(t)\, dt = \sin(t)$$

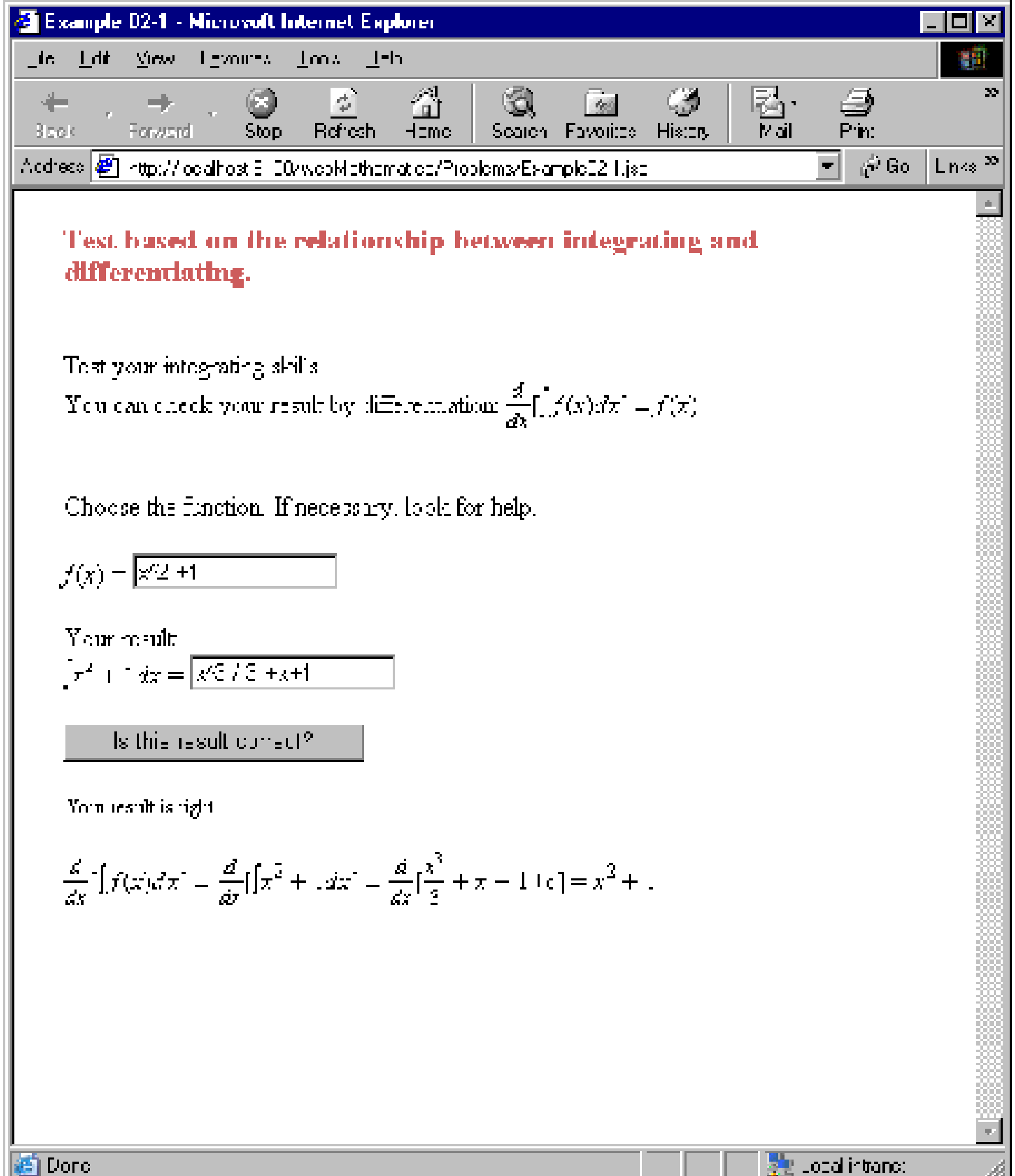
Result, Linear Rule Constant factor

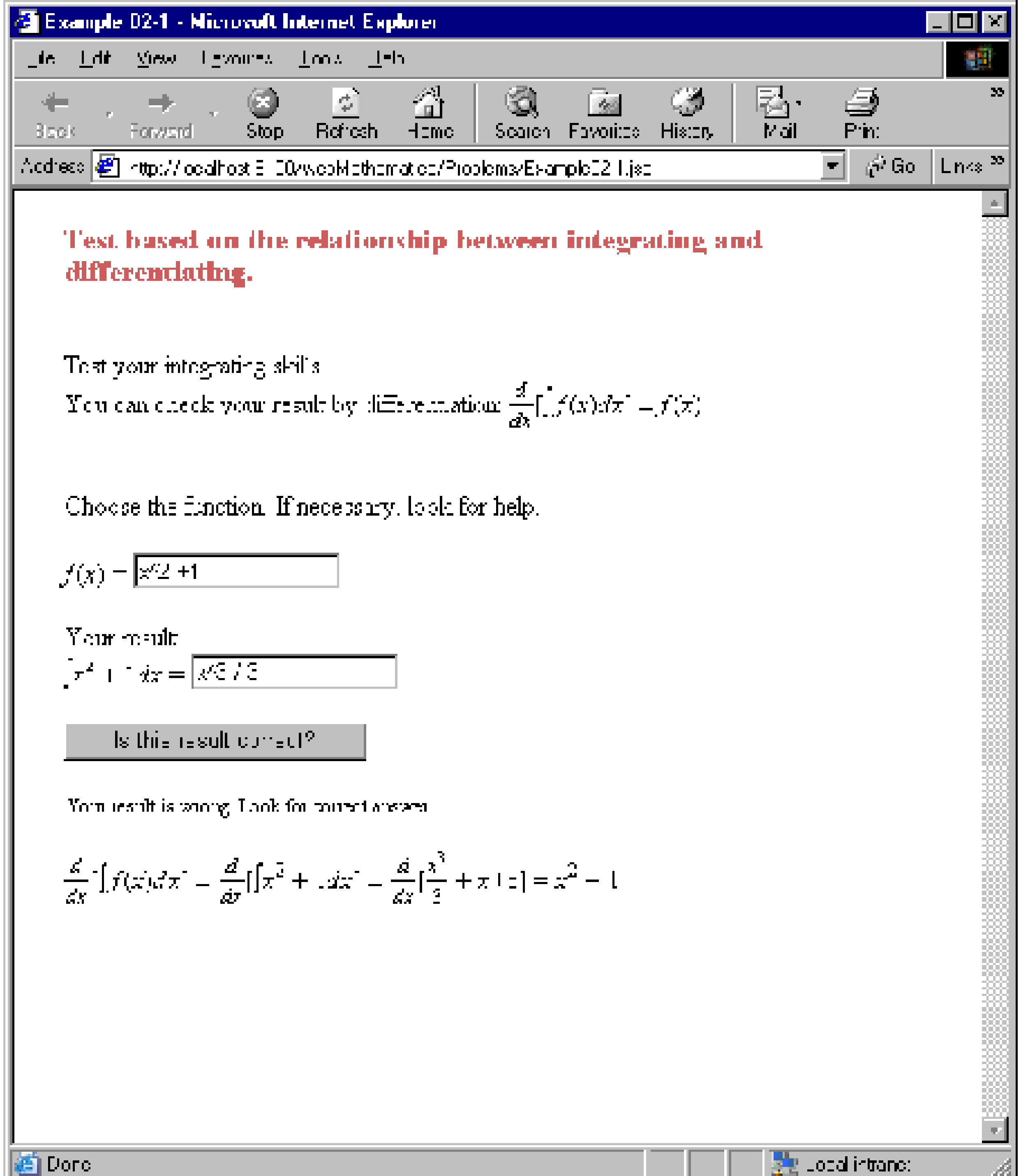
$$\int -\cos(t)\, dt = -\int \cos(t)\, dt = -\sin(t)$$

Result, Integration by Parts (Answer)

$$\int (t+3)\sin(t)\, dt = uv - \int v\, u'\, dt = -(t+3)\cos(t) - \int -\cos(t)\, dt = \sin(t) - (t+3)\cos(t)$$


Home
Calculator
First Level
Second Level
Third Level
Tests
Historical Background
Given integral
Rewrite
Integrate
Simplify
You can look for the more examples and test your ability for solving these problems.
EXERCISE
REMARK
Remember that you can check your answer to an antidifferentiation problem by differentiating. For instance, in the previous Example, you can check that $\frac{2}{3}x^{3/2}$ is correct antiderivative by differentiating to obtain
$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}$
CALCULATOR
Test based on the relationship between integrating and differentiating.
Test your integrating skills.
You can check your result by differentiation: $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$
Choose the function. If necessary, look for help.
Your result:
Is this result correct?
Your result is right.


Example 02-1 - Microsoft Internet Explorer
Edit View Favorites Tools Help
Back Forward Stop Refresh Home Search Favorites History Mail Print
Address
Go Links
Test based on the relationship between integrating and differentiating.
Test your integrating skills
You can check your result by differentiation: d/dx[∫f(x)dx] = f(x)
Choose the function. If necessary, look for help.
f(x) = x^2 +1
Your result:
∫(x^2 + 1) dx = x^3 / 3 +x+1
Is this result correct?
Your result is right
d/dx[∫f(x)dx] = d/dx[∫(x^2 + 1)dx] = d/dx[x^3/3 + x + 1 + c] = x^2 + 1
Done
Local intranet


Example 02-1 - Microsoft Internet Explorer
Back Forward Stop Refresh Home Search Favorites History Mail Print
Address
Go Links
Test based on the relationship between integrating and differentiating.
Test your integrating skills
You can check your result by differentiation: $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$
Choose the function. If necessary, look for help.
$f(x) =$ x^2 +1
Your result:
$\int x^2 + 1\, dx =$ x^3 / 3
Is this result correct?
Your result is wrong. Look for correct answer.
$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = \frac{d}{dx}[\int x^2 + 1 dx] = \frac{d}{dx}[\frac{x^3}{3} + x + c] = x^2 + 1$
Done
Local intranet