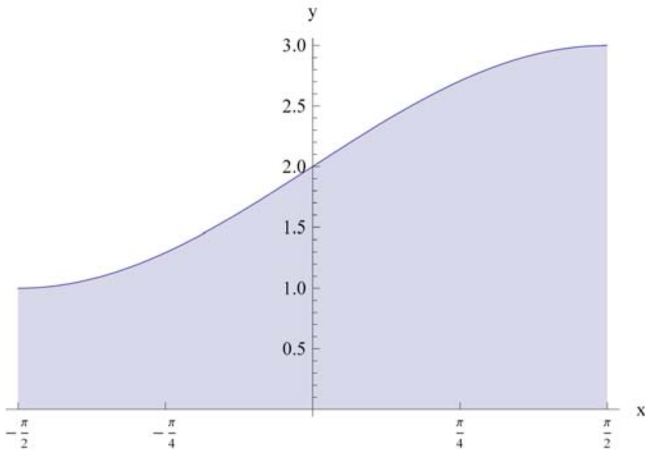
Praha 22. srpna 2007

- **Př. 1 Sestrojte graf funkce f : $y = 2 + \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Graf této funkce a osa x omezují rovinný obrazec. Načrtněte těleso vzniklé rotací tohoto obrazce kolem osy x. Vypočítejte jeho objem.**

```
popis = Table[x, {x, -1/2 π, 1/2 π, 1/4 π}];
```

```
Plot[2 + Sin[x], {x, -π/2, π/2}, AxesLabel → {"x", "y"},
 Filling → Axis, AxesOrigin → {0, 0}, Ticks → {popis, Automatic}]
```



$$\pi * \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \mathrm{Sin}[x])^2 \, dx$$

$$\frac{9\pi^2}{2}$$

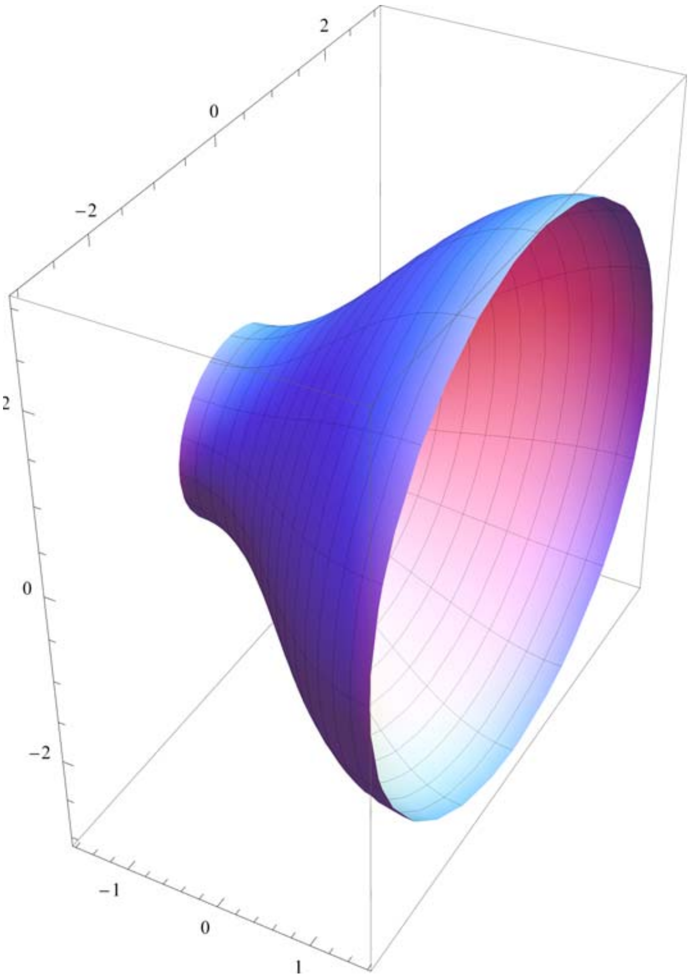
Případně, zajímá-li nás numerický výsledek, použijeme:

$$\pi * \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \mathrm{Sin}[x])^2 \, dx \; // \; N$$

44.4132

Celé těleso můžeme zobrazit:

```
ParametricPlot3D[{x, (2 + Sin[x]) Cos[t], (2 + Sin[x]) Sin[t]},
 {x, -π/2, π/2}, {t, 0, 2 π}, PlotPoints → 30]
```

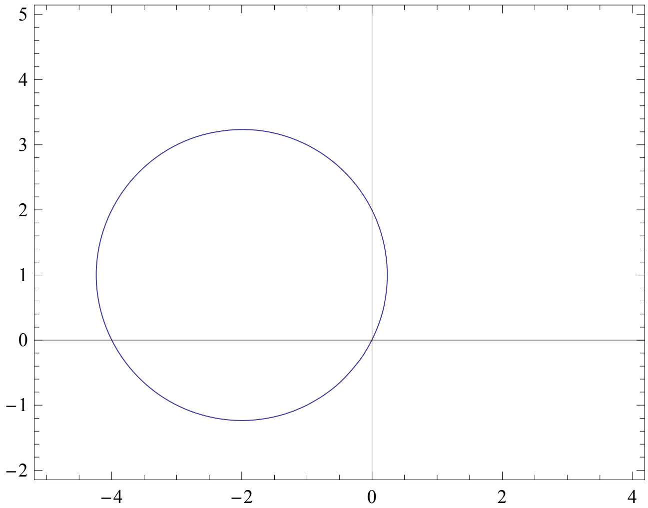


- **Př. 2 Je dána kružnice k:$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$, bod M[0,4] vně kružnice. Sestrojte tečny z bodu M ke kružnici k.**

```
kr = x^2 + y^2 + 4 x - 2 y;
```

Nejprve sestrojíme graf dané kružnice:

```
gr1 = ContourPlot[kr == 0, {x, -5, 4}, {y, -2, 5}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]
```




```
M = {0, 4};
```

Hledáme dotykové body tečen. 1. rovnice:dotykový bod[x0,y0] leží na tečně. 2. rovnice: dotykový bod leží na kružnici.

```
r1 = x * x0 + y * y0 + 2 * (x + x0) - (y + y0) == 0 /. {x → M[[1]], y -> M[[2]]}
r2 = kr == 0 /. {x → x0, y → y0}
```

$-4 + 2\,x0 + 3\,y0 == 0$

$4\,x0 + x0^2 - 2\,y0 + y0^2 == 0$

```
dotbody = Solve[{r1, r2}, {x0, y0}]
```

$\left\{\left\{x0 \to \frac{2}{13}\left(-8 - 3\sqrt{10}\right),\ y0 \to \frac{4}{13}\left(7 + \sqrt{10}\right)\right\},\ \left\{x0 \to \frac{2}{13}\left(-8 + 3\sqrt{10}\right),\ y0 \to \frac{4}{13}\left(7 - \sqrt{10}\right)\right\}\right\}$

Z tohoto vyjádření už snadno "odfiltrujeme" souřadnice dotykových bodů:

```
T1 = {x0, y0} /. dotbody[[1]]
T2 = {x0, y0} /. dotbody[[2]]
```

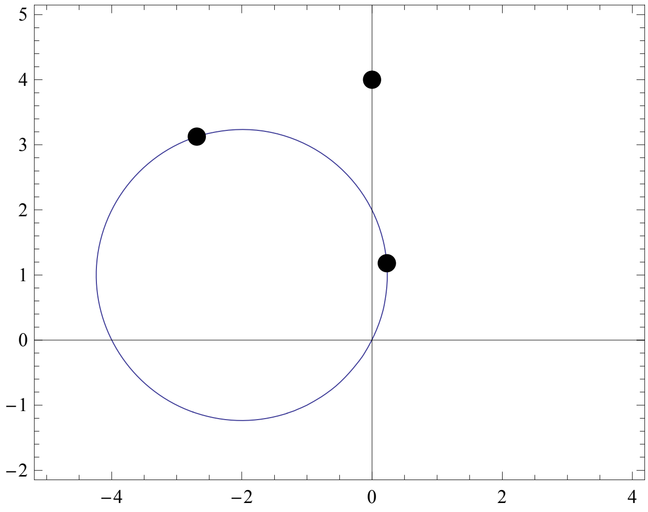
$\left\{\frac{2}{13}\left(-8 - 3\sqrt{10}\right),\ \frac{4}{13}\left(7 + \sqrt{10}\right)\right\}$

$\left\{\frac{2}{13}\left(-8 + 3\sqrt{10}\right),\ \frac{4}{13}\left(7 - \sqrt{10}\right)\right\}$

```
bod1 = Graphics[{PointSize[0.03], Point[T1]}];
bod2 = Graphics[{PointSize[0.03], Point[T2]}];
bod3 = Graphics[{PointSize[0.03], Point[{0, 4}]}];
```

Body a kružnici zobrazíme:

```
Show[gr1, bod1, bod2, bod3]
```



Tečny vyjádříme v parametrickém tvaru, pak zobrazíme celý výsledek příkladu.

```
vt1 = T1 - M
vt2 = T2 - M
```

$$\left\{\frac{2}{13}\left(-8-3\sqrt{10}\right),\ -4+\frac{4}{13}\left(7+\sqrt{10}\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{2}{13}\left(-8+3\sqrt{10}\right),\ -4+\frac{4}{13}\left(7-\sqrt{10}\right)\right\}$$

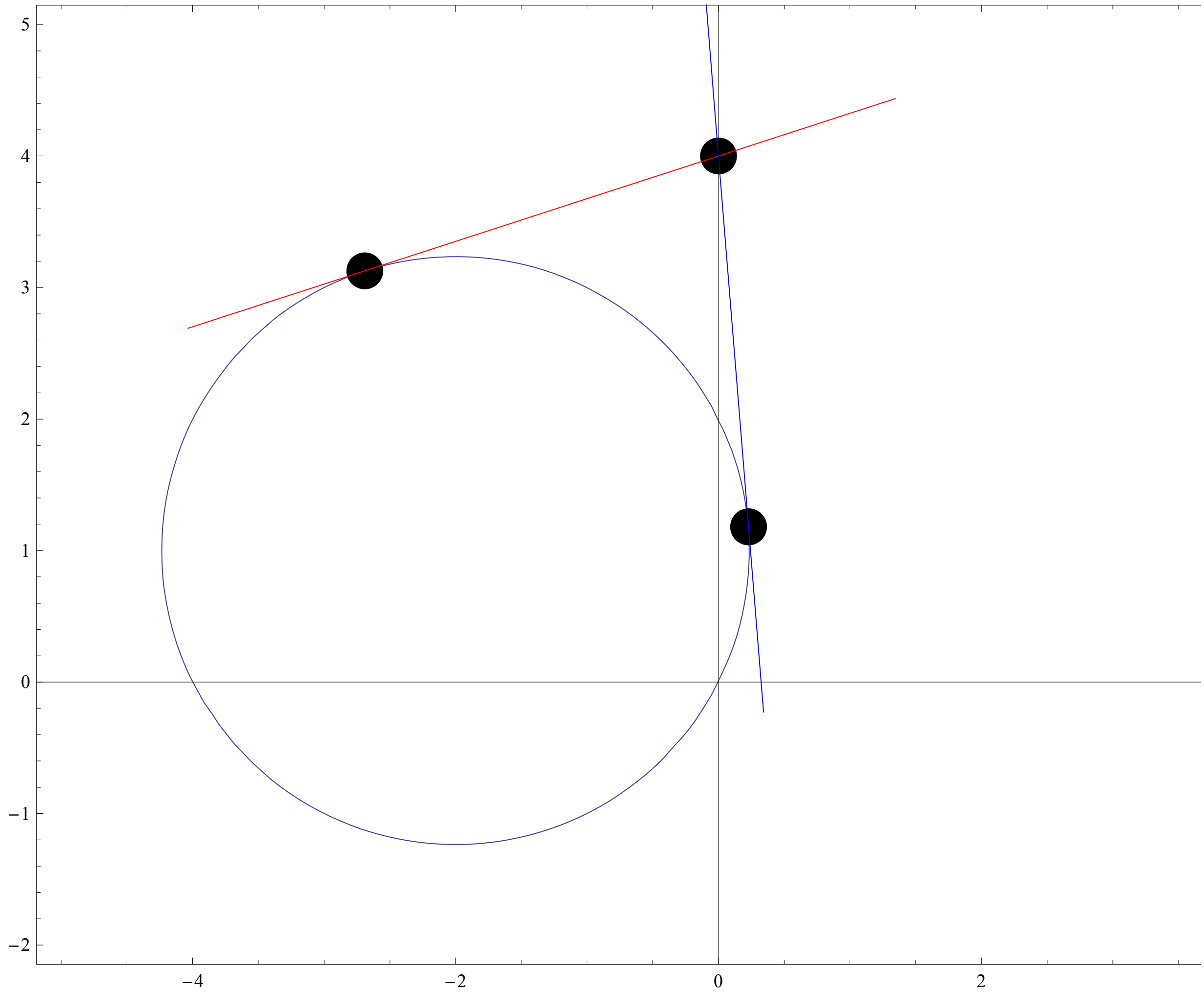
```
t1 = M + t * vt1
t2 = M + t * vt2
```

$$\left\{\frac{2}{13}\left(-8-3\sqrt{10}\right)t,\ 4+\left(-4+\frac{4}{13}\left(7+\sqrt{10}\right)\right)t\right\}$$

$$\left\{\frac{2}{13}\left(-8+3\sqrt{10}\right)t,\ 4+\left(-4+\frac{4}{13}\left(7-\sqrt{10}\right)\right)t\right\}$$

```
grt1 = ParametricPlot[t1, {t, -0.5, 1.5}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]];
grt2 = ParametricPlot[t2, {t, -0.5, 1.5}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]];
```

```
Show[gr1, bod1, bod2, bod3, grt1, grt2]
```

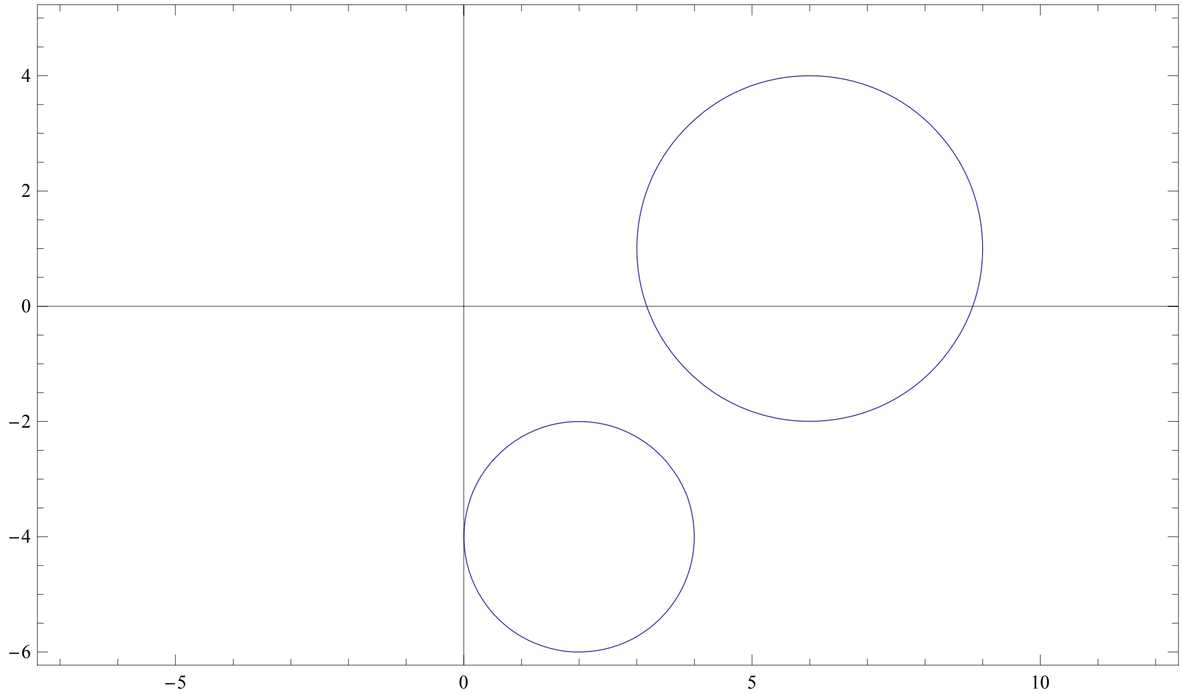


- **Př. 3 Dokonalé číslo nazveme takové přirozené číslo, jež je rovno součtu všech svých přirozených dělitelů menších než je toto číslo.**
  Vypište všechna dokonalá čísla menší než 50000

- **Př. 4 Najděte společné tečny dvou daných kružnic: $(x-2)^2+(y+4)^2=4$, $(x-6)^2+(y-1)^2=9$. Sestrojte příslušné grafy.**

```
k1 = (x - 2)^2 + (y + 4)^2 - 4;
k2 = (x - 6)^2 + (y - 1)^2 - 9;
```

```
gk1 = ContourPlot[k1 == 0, {x, -7, 12}, {y, -6, 5}, AspectRatio → Automatic, Axes → True];
gk2 = ContourPlot[k2 == 0, {x, -7, 12}, {y, -6, 5}];
Show[gk1, gk2]
```



Tečny budeme hledat ve tvaru $y = kx+q$. Průsečíky dostaneme řešením rovnic a, b. Následně v soustavě rovnic *vysledek* požadujeme, aby průsečíky pro příslušnou kružnici splývaly. Úloha má maximálně 4 řešení. Při řešení se neuvažují tečny rovnoběžné s osou y, to by bylo nutno ošetřit zvlášť.

```
rce1 = k1 == 0 /. y → k * x + q
```

$-4 + (-2 + x)^2 + (4 + q + k\,x)^2 == 0$

```
rce2 = k2 == 0 /. y -> k * x + q
```

$-9 + (-6 + x)^2 + (-1 + q + k\,x)^2 == 0$

```
a = Solve[rce1, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{2 - 4k - kq - \sqrt{-12 - 16k - 8q - 4kq - q^2}}{1 + k^2}\right\}, \left\{x \to \frac{2 - 4k - kq + \sqrt{-12 - 16k - 8q - 4kq - q^2}}{1 + k^2}\right\}\right\}$$

```
koren11 = x /. a[[1]];
koren12 = x /. a[[2]];
```

```
b = Solve[rce2, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{6 + k - kq - \sqrt{8 + 12k - 27k^2 + 2q - 12kq - q^2}}{1 + k^2}\right\}, \left\{x \to \frac{6 + k - kq + \sqrt{8 + 12k - 27k^2 + 2q - 12kq - q^2}}{1 + k^2}\right\}\right\}$$

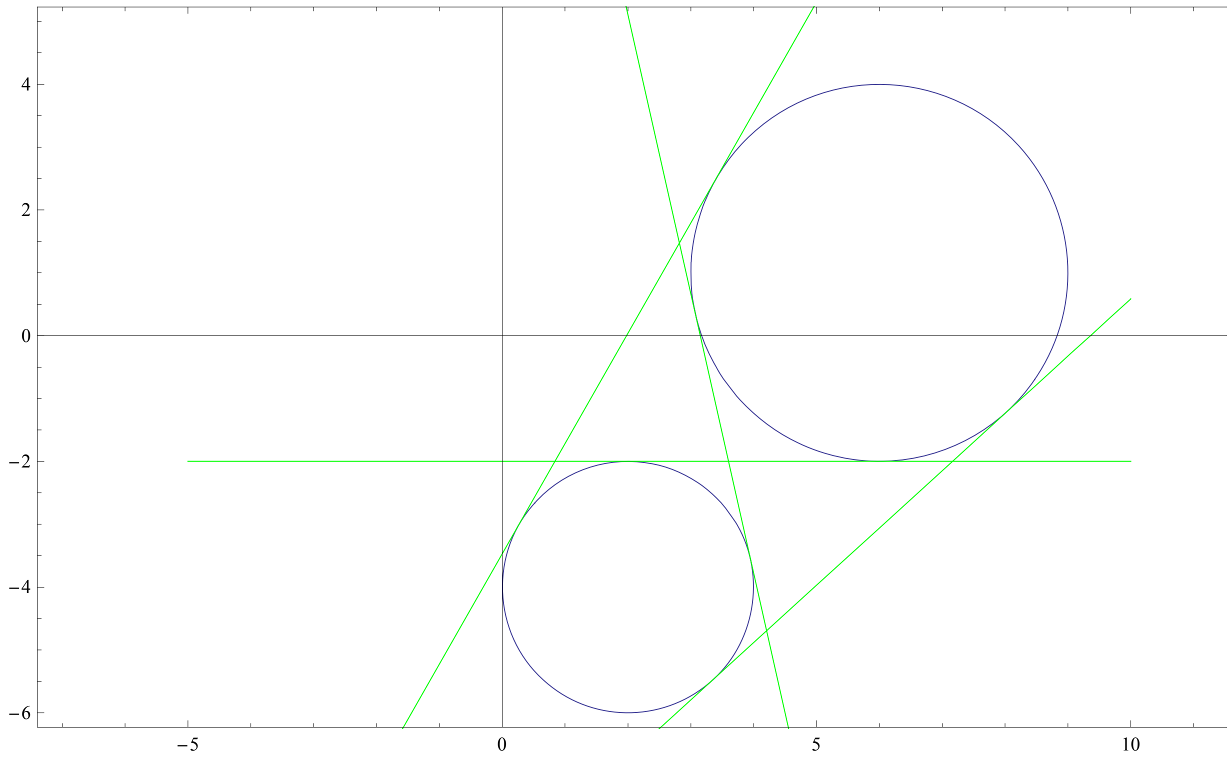
```
koren21 = x /. b[[1]];
koren22 = x /. b[[2]];
```

```
vysledek = Solve[{koren11 == koren12, koren21 == koren22}, {k, q}]
```

$$\left\{\{q \to -2, k \to 0\}, \left\{q \to 14, k \to -\frac{40}{9}\right\}, \left\{q \to \frac{2}{5}\left(-15-2\sqrt{10}\right), k \to \frac{2}{15}\left(10-\sqrt{10}\right)\right\}, \left\{q \to \frac{2}{5}\left(-15+2\sqrt{10}\right), k \to \frac{2}{15}\left(10+\sqrt{10}\right)\right\}\right\}$$

```
kt1 = k /. vysledek[[1]][[2]];
qt1 = q /. vysledek[[1]][[1]];
kt2 = k /. vysledek[[2]][[2]];
qt2 = q /. vysledek[[2]][[1]];
kt3 = k /. vysledek[[3]][[2]];
qt3 = q /. vysledek[[3]][[1]];
kt4 = k /. vysledek[[4]][[2]];
qt4 = q /. vysledek[[4]][[1]];
```

```
t1 = Plot[kt1 x + qt1, {x, -5, 10}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]];
t2 = Plot[kt2 x + qt2, {x, -5, 10}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]];
t3 = Plot[kt3 x + qt3, {x, -5, 10}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]];
t4 = Plot[kt4 x + qt4, {x, -5, 10}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]];
Show[gk1, gk2, t1, t2, t3, t4]
```



■ Př. 5 Řešte danou binomickou rovnici v C :

```
brov = x^6 + 1 == 0;
```

```
Solve[brov, x]
```

$$\left\{\{x \to -i\}, \{x \to i\}, \left\{x \to -(-1)^{1/6}\right\}, \left\{x \to (-1)^{1/6}\right\}, \left\{x \to -(-1)^{5/6}\right\}, \left\{x \to (-1)^{5/6}\right\}\right\}$$

Tento výsledek nás asi mnoho neuspokojuje. Můžeme ho ale nechat automaticky přepsat do algebraického tvaru vyjádřením, ve kterém se vyskytuje příkaz ComplexExpand, opakované nahrazení:

```
v = Solve[brov, x] /. (a_ -> b_) :> (a -> ComplexExpand[b])
```

$$\left\{\{x \to -i\},\ \{x \to i\},\ \left\{x \to -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{x \to \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{x \to -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{x \to \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$$

Nyní už vidíme kořeny rovnice v "téměř" algebraickém tvaru.
Pokusme se dále zobrazit všechny kořeny této rovnice v Gaussově rovině :

```
koreny = Table[x /. v[[i]], {i, 1, Length[v]}]
```

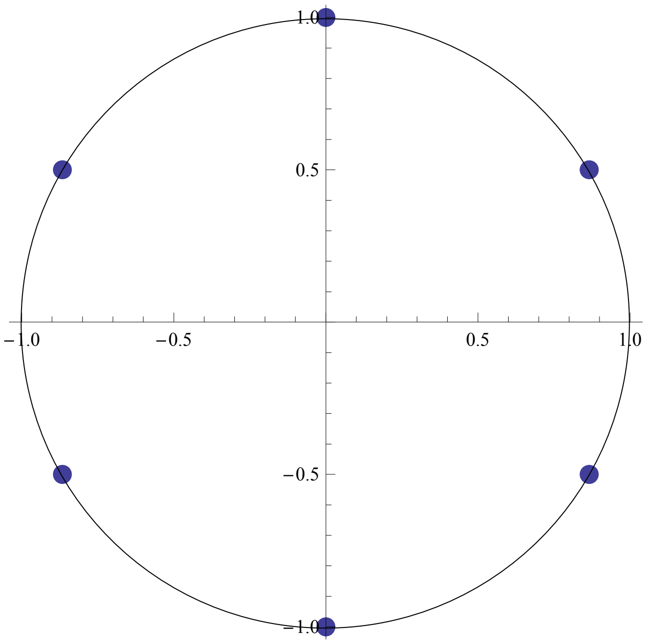
$$\left\{-i,\ i,\ -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

```
listik = Table[{Re[koreny[[i]]], Im[koreny[[i]]]}, {i, 1, Length[v]}]
```

$$\left\{\{0, -1\},\ \{0, 1\},\ \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

```
gr1 = ListPlot[listik, AspectRatio → Automatic, PlotStyle → PointSize[0.03]];
```

```
Show[gr1,
 Graphics[{Circle[{0, 0}, Abs[x /. v[[1]]]]}, AspectRatio → Automatic], PlotRange → All]
```



Absolutní hodnota všech těchto kořenů je 1 - jedná se o komplexní jednotky. Vytiskněmě si argumenty všech kořenů. Tiskne se vždy číslo kořene, argument a absolutní hodnota kořene.

```
Table[{n, Arg[x /. v[[n]]], Abs[x /. v[[n]]]}, {n, 1, Length[v]}]
```

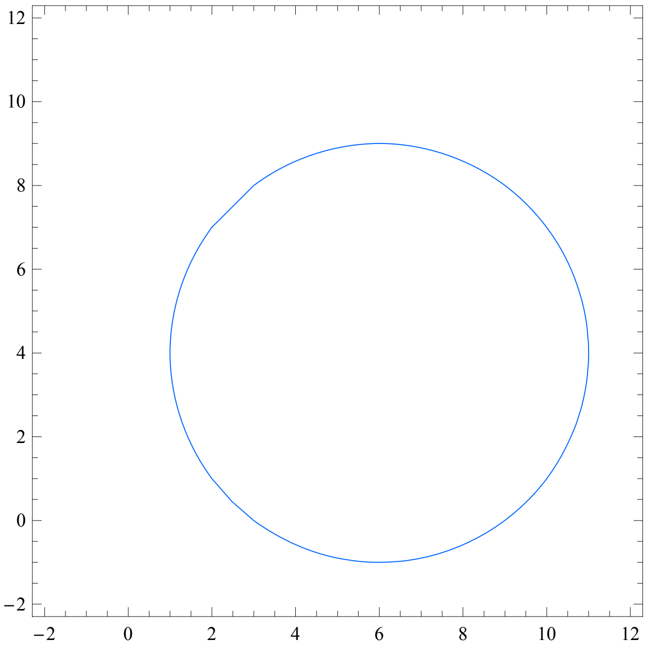
$$\left\{\left\{1, -\frac{\pi}{2}, 1\right\},\ \left\{2, \frac{\pi}{2}, 1\right\},\ \left\{3, -\frac{5\pi}{6}, 1\right\},\ \left\{4, \frac{\pi}{6}, 1\right\},\ \left\{5, -\frac{\pi}{6}, 1\right\},\ \left\{6, \frac{5\pi}{6}, 1\right\}\right\}$$

- **Př. 6 Jsou dány body [2,1], [1,4], [6,9]. Sestrojte kružnici, parabolu s osou rovnoběžnou s osou x a parabolu s osou rovnoběžnou s osou y tak, aby všechny křivky procházely danými body.**

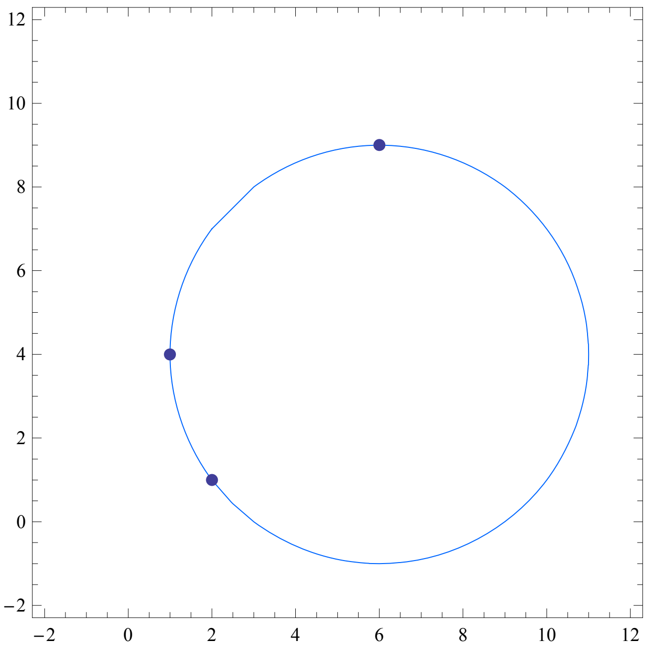
```
bA = {2, 1}; bB = {1, 4}; bC = {6, 9};
body = {bA, bB, bC};
```

■ Kružnice :

```
k = (x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2;

rovnice = Table[k == 0 /. {x → body[[i, 1]], y → body[[i, 2]]}, {i, 1, 3}]

{(2 - m)^2 + (1 - n)^2 - r^2 == 0, (1 - m)^2 + (4 - n)^2 - r^2 == 0, (6 - m)^2 + (9 - n)^2 - r^2 == 0}

kr = Solve[rovnice, {m, n, r}]

{{r → -5, m → 6, n → 4}, {r → 5, m → 6, n → 4}}

gr1 = ContourPlot[Evaluate[k == 0 /. kr[[2]]],
  {x, -2, 12}, {y, -2, 12}, ContourStyle → Hue[0.6]]
```



```
gr2 = ListPlot[body, PlotStyle -> PointSize[0.02]];

Show[gr1, gr2]
```



Parabola s osou rovnoběžnou s osou x :

```
par = y == a * x^2 + b * x + c;
```

```
rovnicepar = Table[par /. {x → body[[i, 1]], y → body[[i, 2]]}, {i, 1, 3}]
```

{1 == 4 a + 2 b + c, 4 == a + b + c, 9 == 36 a + 6 b + c}

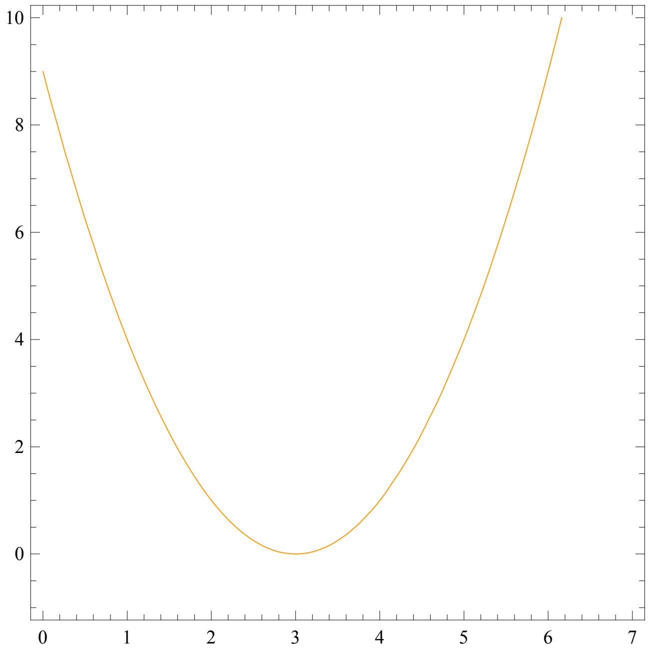
```
vysl = Solve[rovnicepar, {a, b, c}]
```

{{a → 1, b → -6, c → 9}}

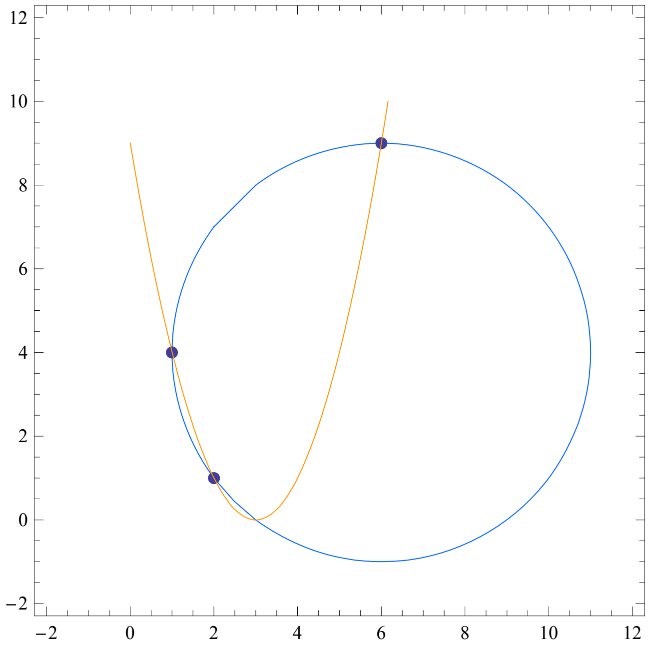
```
par /. vysl[[1]]
```

$y == 9 - 6 x + x^2$

```
gr3 = ContourPlot[Evaluate[par /. vysl[[1]]],
  {x, 0, 7}, {y, -1, 10}, ContourStyle → Hue[0.1]]
```



```
Show[gr1, gr2, gr3]
```



- **Parabola s osou rovnoběžnou s osou y :**

par2 = x == d * y^2 + e * y + f

x == f + e y + d y^2

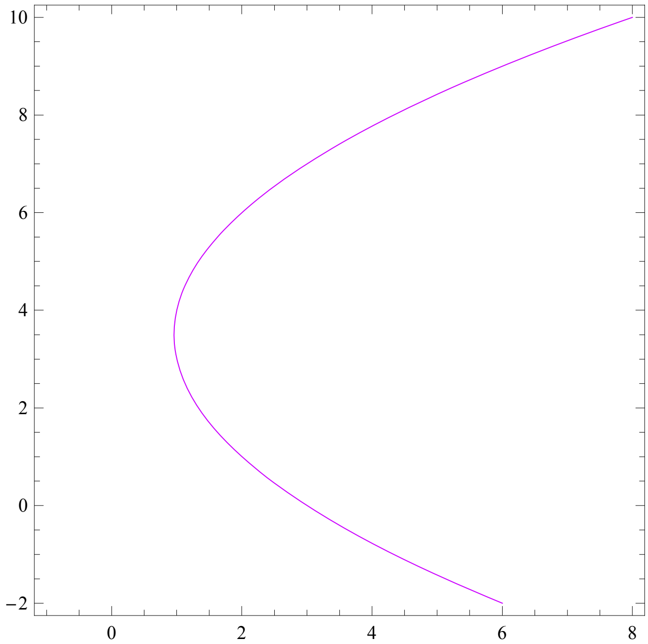
```
rovnicepar2 = Table[par2 /. {x → body[[i, 1]], y → body[[i, 2]]}, {i, 1, 3}]
```

{2 == d + e + f, 1 == 16 d + 4 e + f, 6 == 81 d + 9 e + f}

```
vysl2 = Solve[rovnicepar2, {d, e, f}]
```

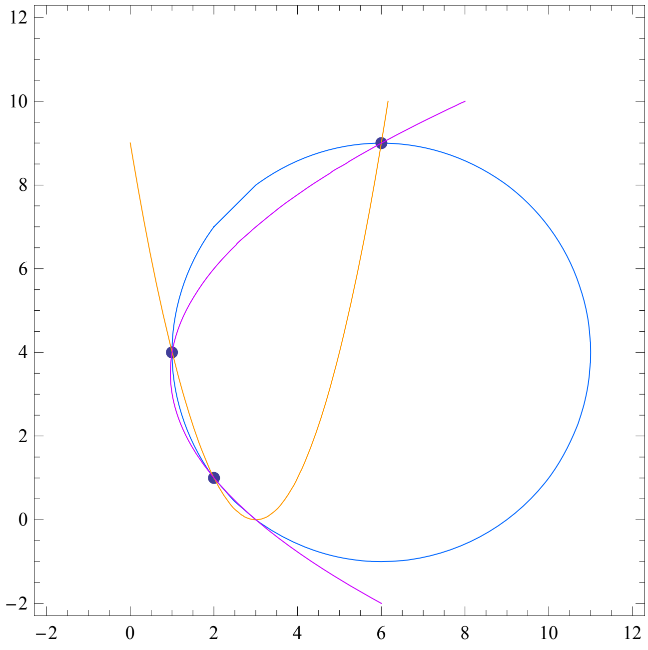
$\left\{\left\{d \to \frac{1}{6},\ e \to -\frac{7}{6},\ f \to 3\right\}\right\}$

```
gr4 = ContourPlot[Evaluate[par2 /. vysl2[[1]]],
  {x, -1, 8}, {y, -2, 10}, ContourStyle → Hue[0.8]]
```



- **Všechny grafy :**

```
Show[gr1, gr2, gr3, gr4]
```



- **Př. 7 Narozeninový paradox (Richard von Mises 1939): určete pravděpodobnost, že ve skupině 30 lidí je alespoň jedna dvojice narozená ve stejný den v roce. Přestupný rok neuvažujeme.**

Úlohu můžeme řešit klasickou matematikou, jak si ukážeme později, nejprve ji ale zkusíme řešit simulací, což nám Mathematica umožňuje. Použijeme generátor (pseudo)náhodných čísel:

```
RandomInteger[{1, 365}]
```

```
212
```

Vygenerujeme tímto generátorem 30 náhodných dat narození jako čísel z rozsahu 1..365.

```
skupina := RandomInteger[{1, 365}, 30]
```

```
skupina
```

```
{5, 134, 234, 280, 340, 18, 50, 309, 350, 112, 245, 204, 118, 94,
 24, 175, 210, 24, 288, 273, 22, 100, 112, 190, 18, 67, 115, 261, 19, 160}
```

Získaná data můžeme pro lepší prohlížení setřídit.

```
Sort[skupina]
```

```
{2, 18, 26, 33, 52, 65, 72, 77, 78, 90, 98, 120, 152, 156, 156,
 172, 172, 209, 220, 234, 238, 257, 258, 265, 272, 292, 298, 327, 348, 364}
```

Pokus opakujeme 10000x, není problém i víckrát. Vznikne list data.

```
data = Table[skupina, {10 000}];
```

Definujeme funkci s využitím funkcí Mathematicy. Union[sk] vynechá opakované hodnoty, ty nás zajímají.

```
stejnyden[sk_] := Length[Union[sk]] < 30
```

A teď už jen spočteme pravděpodobnost jako relativní četnost. Funkce Map aplikuje definovanou fci stejnyden na data, Count spočte, kolikrát se vrátila pravda - alespoň jedna dvojice narozená ve stejný den v roce. Výsledek zobrazíme numericky.

```
pst = Count[Map[stejnyden, data], True] / 10 000 // N
```

```
0.7094
```

A trochu matematiky:

Přesné - matematické řešení:

```
jinak = 1 - Binomial[365, 30] * 30 ! / Power[365, 30] // N
```

```
0.706316
```

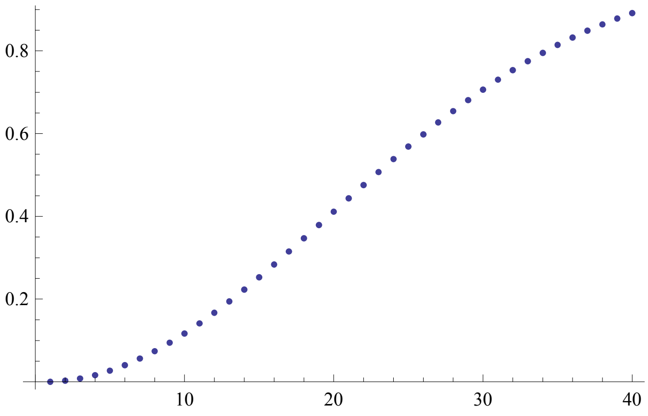
Spočteme ještě pravděpodobnosti pro počet členů skupiny od 1 do 40, výsledky zobrazíme do grafu:

```
jinaknp[p_] := 1 - Binomial[365, p] * p ! / Power[365, p]
```

```
tabulka = Table[{n, jinaknp[n]}, {n, 1, 40}] // N
```

```
{{1., 0.}, {2., 0.00273973}, {3., 0.00820417}, {4., 0.0163559}, {5., 0.0271356},
 {6., 0.0404625}, {7., 0.0562357}, {8., 0.0743353}, {9., 0.0946238}, {10., 0.116948},
 {11., 0.141141}, {12., 0.167025}, {13., 0.19441}, {14., 0.223103}, {15., 0.252901},
 {16., 0.283604}, {17., 0.315008}, {18., 0.346911}, {19., 0.379119}, {20., 0.411438},
 {21., 0.443688}, {22., 0.475695}, {23., 0.507297}, {24., 0.538344}, {25., 0.5687},
 {26., 0.598241}, {27., 0.626859}, {28., 0.654461}, {29., 0.680969}, {30., 0.706316},
 {31., 0.730455}, {32., 0.753348}, {33., 0.774972}, {34., 0.795317}, {35., 0.814383},
 {36., 0.832182}, {37., 0.848734}, {38., 0.864068}, {39., 0.87822}, {40., 0.891232}}
```

```
ListPlot[tabulka]
```

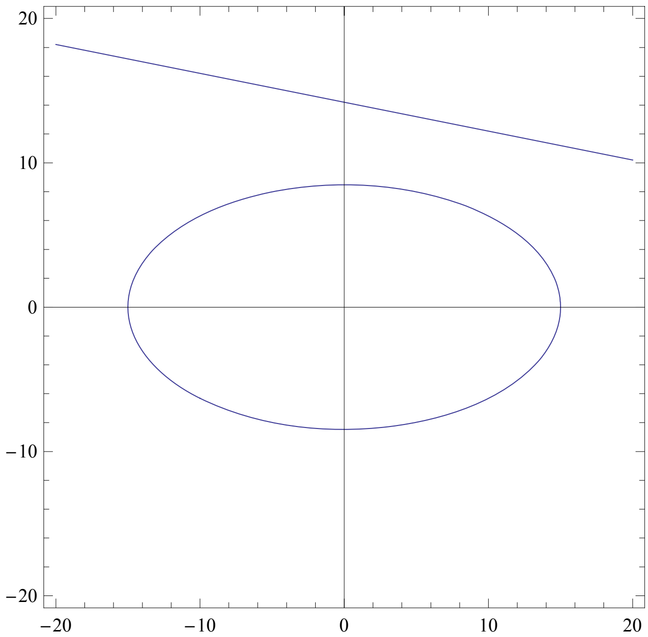


▪ Př. 8   Na dané elipse najděte bod nejbližší dané přímce.

```
elipsa := 8 x^2 + 25 y^2 == 1800;
primka := x + 5 y == 71;
```

```
gr1 = ContourPlot[Evaluate[elipsa], {x, -20, 20}, {y, -20, 20}, Axes → True];
gr2 = ContourPlot[Evaluate[primka], {x, -20, 20}, {y, -20, 20}];
```

```
Show[gr1, gr2]
```




```
tecna = x + 5 y == c;
```

```
rovnice = Solve[{elipsa, tecna}, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{9}\left(c - 2\sqrt{2}\sqrt{2025 - c^2}\right),\ y \to \frac{2}{45}\left(4c + \sqrt{2}\sqrt{2025 - c^2}\right)\right\},\right.$$
$$\left.\left\{x \to \frac{c}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{2}\sqrt{2025 - c^2},\ y \to \frac{2}{45}\left(4c - \sqrt{2}\sqrt{2025 - c^2}\right)\right\}\right\}$$

```
x0 = x /. rovnice[[1, 1]];
x1 = x /. rovnice[[2, 1]];
```

```
rproc = Solve[x0 == x1, c]
```

$\{\{c \to -45\}, \{c \to 45\}\}$

```
xT = x0 /. rproc[[2]]
```

5

```
Solve[tecna /. {c → 45, x → 5}, y]
```

$\{\{y \to 8\}\}$

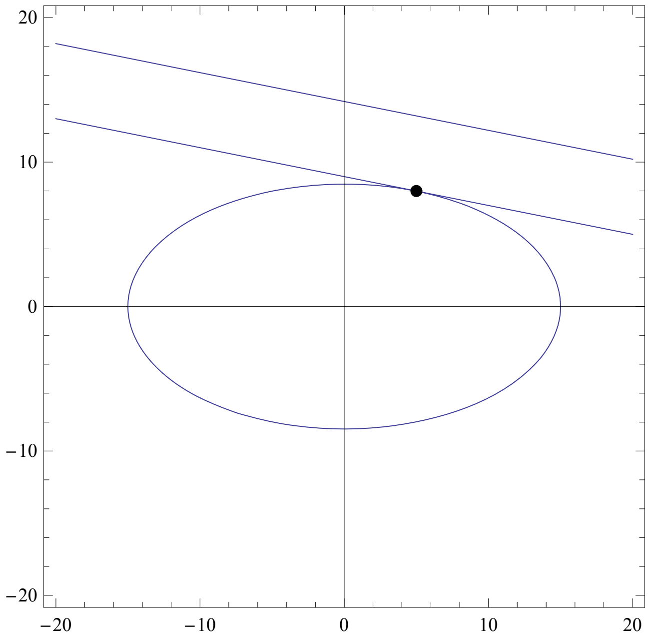
```
tecna = x + 5 y == 45
```

$x + 5\,y == 45$

```
gr3 = ContourPlot[Evaluate[tecna], {x, -20, 20}, {y, -20, 20}];
```

```
boddotyku = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{5, 8}]}];
```

```
Show[gr1, gr2, gr3, boddotyku]
```




```
rov = Solve[elipsa, y]
```

$$\left\{\left\{y \to -\frac{2}{5}\sqrt{2}\,\sqrt{225 - x^2}\right\}, \left\{y \to \frac{2}{5}\sqrt{2}\,\sqrt{225 - x^2}\right\}\right\}$$

```
bod = {x, y /. rov[[2]]}
```

$$\left\{x, \frac{2}{5}\sqrt{2}\,\sqrt{225 - x^2}\right\}$$

$$\mathbf{delka}[x\_] := \frac{x + 5 * \frac{2}{5}\sqrt{2}\,\sqrt{225 - x^2} - 71}{\sqrt{26}}$$

```
delka'[x]
```

$$\frac{1 - \frac{2\sqrt{2}\,x}{\sqrt{225 - x^2}}}{\sqrt{26}}$$

```
Solve[delka'[x] == 0, x]
{{x → 5}}
```