

Mathematica - pomôcka pre pedagóga

Ako generovať písomky

Sčítavame zlomky

Mathematica má snahu vždy spočítať zlomky presne. Túto jej vlastnosť môžeme použiť.

```
1 / 2 + 3 / 5
```

```

$$\frac{11}{10}$$

```

Pomocou príkazu **Random** môžeme vygenerovať náhodné číslo. V tomto prípade vygenerujeme celé číslo z intervalu (-10,10)

```
Random[Integer, {-10, 10}]
```

```
-5
```

Aby sme mohli sčítať dva zlomky budeme potrebovať 4 rôzne čísla. Aby sme nemuseli moc písať, vygenerujeme ich pomocou jedného príkazu.

```
{a, b, c, d} = Table[Random[Integer, {1, 10}], {4}]
```

```
{6, 2, 10, 7}
```

Pomocou príkazu Print dokážeme vytlačiť príklad (zatiaľ na obrazovku) bez toho, aby ho *Mathematica* vypočítala

```
Print[a, "/", b, " + ", c, "/", d, "="]
```

```
6/2 + 10/7=
```

```
9/6 + 10/2=
```

Nestačí mi ale vytlačiť zadanie, chcem vytlačiť aj riešenie.

```
Print[a, "/", b, " + ", c, "/", d, " = ", a/b + c/d]
```

```
6/2 + 10/7 =  $\frac{31}{7}$ 
```

Prípadne môžeme nechať vypísať aj kompletný postup.

```
Print[ a , "/", b , " + " , c , "/", d , " = " ,
      "( , a , "*" , d , "+" , b , "*" , c , " ) / ( " , b , "*" , d , " ) = " ,
      "( , a*d , "+" , b*c , " ) / ( " , b , "*" , d , " ) = " ,
      a*d + b*c , "/" , b*d , " = " ,
      a / b + c / d]
```

$$6/2 + 10/7 = (6*7+2*10)/(2*7) = (42+20)/(2*7) = 62/14 = \frac{31}{7}$$

Predchádzajúce príklady spojíme do jednej bunky.

```
{a, b, c, d} = Table[Random[Integer, {-10, 10}], {4}];
Print[ a , "/", b , " + " , c , "/", d , " = " ]
Print[ a , "/", b , " + " , c , "/", d , " = " , a / b + c / d ]
Print[ a , "/", b , " + " , c , "/", d , " = " ,
      "( , a , "*" , d , "+" , b , "*" , c , " ) / ( " , b , "*" , d , " ) = " ,
      "( , a*d , "+" , b*c , " ) / ( " , b , "*" , d , " ) = " ,
      a*d + b*c , "/" , b*d , " = " ,
      a / b + c / d]
```

$$-8/6 + 0/-8 =$$

$$-8/6 + 0/-8 = -\frac{4}{3}$$

$$-8/6 + 0/-8 = (-8*-8+6*0)/(6*-8) = (64+0)/(6*-8) = 64/-48 = -\frac{4}{3}$$

Jeden príklad sa nám podarilo vygenerovať, stačí teda predchádzajúce príklady obaliť do cyklu a nechať vygenerovať toľko zadaní, koľko potrebujeme.

```

Do[
  {a, b, c, d} = Table[Random[Integer, {-10, 10}], {4}];
Print[a, "/", b, " + ", c, "/", d, " = "]
Print[a, "/", b, " + ", c, "/", d, " = ", a/b + c/d]
Print[a, "/", b, " + ", c, "/", d, " = ",
      "(", a, "*", d, "+",
      b, "*", c, ") / (", b, "*", d, ") = ",
      "(", a*d, "+", b*c, ") / (", b, "*", d, ") = ",
      a*d + b*c, "/", b*d, " = ",
      a/b + c/d];
Print["====="],
{3}]

```

$$0/-7 + -8/-1 =$$

$$0/-7 + -8/-1 = 8$$

$$0/-7 + -8/-1 = (0*-1 + -7*-8) / (-7*-1) = (0+56) / (-7*-1) = 56/7 = 8$$

=====

$$5/-8 + -3/-9 =$$

$$5/-8 + -3/-9 = -\frac{7}{24}$$

$$5/-8 + -3/-9 = (5*-9 + -8*-3) / (-8*-9) = (-45+24) / (-8*-9) = -21/72 = -\frac{7}{24}$$

=====

$$-1/10 + -8/3 =$$

$$-1/10 + -8/3 = -\frac{83}{30}$$

$$-1/10 + -8/3 = (-1*3 + 10*-8) / (10*3) = (-3 + -80) / (10*3) = -83/30 = -\frac{83}{30}$$

=====

Príkaz **Print**, ale dokáže výstup zasláť len na obrazovku. Ak chceme výstup umiestniť do výsledného súboru, musíme použiť príkazy, ktoré náš výpočet prepíšu do String-ov (znakov). Je to veľmi jednoduché.

```

{a, b, c, d} = Table[Random[Integer, {1, 10}], {4}]

pom = ToString[a] <> "/" <> ToString[b] <>
      " + " <> ToString[c] <> "/" <> ToString[d] <> "="

pom1 = ToString[a] <> "/" <> ToString[b] <> " + " <>
      ToString[c] <> "/" <> ToString[d] <> " = " <>
      "(" <> ToString[a] <> "*" <> ToString[d] <> "+" <>
      ToString[b] <> "*" <> ToString[c] <> ") / (" <>
      ToString[b] <> "*" <> ToString[d] <> ") = (" <>
      ToString[a * d] <> "+" <> ToString[b * c] <> ") / (" <>
      ToString[b] <> "*" <> ToString[d] <> ") = " <>
      ToString[a * d + b * c] <> "/" <> ToString[b * d] <> " = " <>
      ToString[Numerator[a / b + c / d]] <> "/" <>
      ToString[Denominator[a / b + c / d], OutputForm]

```

$a / b + c / d$

{3, 9, 8, 4}

$3/9 + 8/4 =$

$3/9 + 8/4 = (3*4+9*8)/(9*4) = (12+72)/(9*4) = 84/36 = 7/3$

$\frac{7}{3}$

Ešte stále sme ale neošetrili všetky možnosti. Čo by sa stalo v prípade, že ako hodnotu niektorého menovateľa dostaneme 0. Musíme tejto možnosti zabrániť. V prípade, že tento prípad nastane, vygenerujeme nový príklad.

```
Clear[generuj, a, b, c, d];  
generuj[x_] := Module[{a, b, c, d, pom},  
  Label[pom];  
  {a, b, c, d} = Table[Random[Integer, {-10, 10}], {4}];  
  If[b == 0 || d == 0, Goto[pom]];  
  {a, b, c, d}  
]
```

Vyskúšame nami nadefinovanú funkciu

```
generuj[x]
```

```
{-1, 7, 7, -7}
```

Môžeme vygenerovať ľubovoľný počet štvoríc čísel - všetky budú korektné.

```
Table[generuj[x], {10}]
```

```
{{10, 3, -6, -6}, {-9, -4, 2, 1}, {-9, 7, 9, 5}, {4, -6, -5, -4},  
{-5, -5, 8, -3}, {-2, -1, 8, 4}, {-2, 5, -7, 7},  
{-3, -1, -8, -4}, {-9, 9, -8, 9}, {2, 4, -4, -3}}
```

Všetky pripravené možnosti spojíme do jednej bunky

```

Clear[generuj, a, b, c, d];
generuj[x_] := Module[{a, b, c, d, pom},
  Label[pom];
  {a, b, c, d} = Table[Random[Integer, {-10, 10}], {4}];
  If[b == 0 || d == 0, Goto[pom]];

  pom1 = ToString[a] <> "/" <> ToString[b] <>
    " + " <> ToString[c] <> "/" <> ToString[d] <> "=";

  pom2 = ToString[a] <> "/" <> ToString[b] <> " + " <>
    ToString[c] <> "/" <> ToString[d] <> " = " <>
    "(" <> ToString[a] <> "*" <> ToString[d] <> "+" <>
    ToString[b] <> "*" <> ToString[c] <> ")/(" <>
    ToString[b] <> "*" <> ToString[d] <> ") = (" <>
    ToString[a * d] <> "+" <> ToString[b * c] <> ")/(" <>
    ToString[b] <> "*" <> ToString[d] <> ") = " <>
    ToString[a * d + b * c] <> "/" <> ToString[b * d] <> " = " <>
    ToString[Numerator[a / b + c / d]] <> "/" <>
    ToString[Denominator[a / b + c / d], OutputForm];

  Print[pom1];
  Print[pom2];
  Print["====="];
];

```

Overíme, že funkcia je korektne definovaná

generuj[x]

$$-3/-8 + 5/-4 =$$

$$-3/-8 + 5/-4 = (-3*-4 + -8*5) / (-8*-4)$$

$$= (12 + -40) / (-8*-4) = -28/32 = -7/8$$

=====

Všimnite si, že dve z použitých premenných - **pom1** a **pom2** sú globálne premenné. Ich hodnotu poznáme aj mimo predchádzajúcej procedúry.

pom1

$$-3/-8 + 5/-4 =$$

pom2

$$-3/-8 + 5/-4 = (-3*-4+-8*5)/(-8*-4) = (12+-40)/(-8*-4) = -28/32 = -7/8$$

Môžeme samozrejme vygenerovať niekoľko príkladov. Podľa toho, ako upravíme základnú funkciu **generuj []**, dostaneme výstupy rôzneho tvaru.

Table[generuj[x], {3}];

$$4/10 + -1/-1 =$$

$$4/10 + -1/-1 = (4*-1+10*-1)/(10*-1) \\ = (-4+-10)/(10*-1) = -14/-10 = 7/5$$

=====

$$-5/10 + -2/-10 =$$

$$-5/10 + -2/-10 = (-5*-10+10*-2)/(10*-10) \\ = (50+-20)/(10*-10) = 30/-100 = -3/10$$

=====

$$-1/-8 + -4/-8 =$$

$$-1/-8 + -4/-8 = (-1*-8+-8*-4)/(-8*-8) = (8+32)/(-8*-8) = 40/64 = 5/8$$

=====

Výstup na obrazovke nám ale nestačí, chceme pripraviť zadania pre študentov - napríklad vo forme samostatnej písomky. Musíme zabezpečiť výstup do súboru.

Najskôr nastavíme adresár, do ktorého chceme zapísať výsledné súbory.

SetDirectory["c:\Work"]

c:\Work

Pripravíme práva na zápis do súboru a vygenerované zadanie zapíšeme do týchto súborov. Teraz zároveň vidíme aj dôvod prečo sme do jednej premennej umiestňovali len zadanie a do druhej premennej aj riešenie.

```

zadanie = OpenWrite["zadanie1.txt"];
riesenie = OpenWrite["zadanie1r.txt"];
WriteString[zadanie, "Vypocitaj nasledujuce priklady"];
WriteString[riesenie,
  "Priklady na scitanie dvoch zlomkov"];

Do[
  pom = generuj[x];
  WriteString[zadanie, "\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n", pom1];
  WriteString[riesenie, "\n \n", pom2];

  WriteString[riesenie,
    "\n====="],
  {10}]

Close[zadanie];
Close[riesenie];

```

$$-10/7 + 2/-7=$$

$$-10/7 + 2/-7 = (-10 \cdot -7 + 7 \cdot 2) / (7 \cdot -7) = (70 + 14) / (7 \cdot -7) = 84 / -49 = -12/7$$

=====

$$10/6 + 10/-3=$$

$$10/6 + 10/-3 = (10 \cdot -3 + 6 \cdot 10) / (6 \cdot -3) = (-30 + 60) / (6 \cdot -3) = 30 / -18 = -5/3$$

=====

$$8/3 + -8/2=$$

$$8/3 + -8/2 = (8 \cdot 2 + 3 \cdot -8) / (3 \cdot 2) = (16 + -24) / (3 \cdot 2) = -8/6 = -4/3$$

=====

$$10/2 + 5/-1=$$

$$10/2 + 5/-1 = (10 \cdot -1 + 2 \cdot 5) / (2 \cdot -1) = (-10 + 10) / (2 \cdot -1) = 0 / -2 = 0/1$$

=====

$$-10/5 + -4/8=$$

$$-10/5 + -4/8 = (-10 \cdot 8 + 5 \cdot -4) / (5 \cdot 8) = (-80 + -20) / (5 \cdot 8) = -100 / 40 = -5/2$$

=====

$$-7/-6 + 9/2=$$

$$-7/-6 + 9/2 = (-7*2+6*9)/(-6*2) = (-14+54)/(-6*2) = 40/-12 = -10/3$$

=====

$$-4/1 + -10/9 =$$

$$-4/1 + -10/9 = (-4*9+1*-10)/(1*9) = (-36-10)/(1*9) = -46/9 = -46/9$$

=====

$$-7/7 + -4/2 =$$

$$-7/7 + -4/2 = (-7*2+7*-4)/(7*2) = (-14-28)/(7*2) = -42/14 = -3/1$$

=====

$$1/3 + -1/8 =$$

$$1/3 + -1/8 = (1*8+3*-1)/(3*8) = (8-3)/(3*8) = 5/24 = 5/24$$

=====

$$-8/9 + -8/-10 =$$

$$\begin{aligned} -8/9 + -8/-10 &= (-8*-10+9*-8)/(9*-10) \\ &= (80-72)/(9*-10) = 8/-90 = -4/45 \end{aligned}$$

=====

Step by step riešenie kvadratickej rovnice

■ Informácie pre help

```
WalkSolve::usage = "WalkSolve[q == 0, x] nájde dve riešenia
pre kvadratickú rovnicu q == 0 s neznámou x vrátane podrobného
```

■ Definícia procedúry WalkSolve

Premenné e1,e2,e3 predstavujú jednotlivé rovnice v postupe riešenia. Vždy nasledujúci krok riešenia dostaneme aplikáciou algebraickej operácie na obe strany predchádzajúcej rovnice.

Vo všeobecnosti jednotlivé rovnice sú vzájomne rôzne, ale spôsob ako riešiť špeciálne prípady je riešený samostatne. Napríklad, ak $c = 0$ rovnice e1 a e2 budú rovnaké. Procedúra WalkSolveSteps1 eliminuje takéto opakovanie. Procedúra WalkSolveSteps2 eliminuje ostatné možné problémy. Procedúra WalkSolve spája obe predchádzajúce procedúry a rieši prípad dvojnásobného koreňa.

Pripomeňme, že označenie $f @ g @ h @ x$ je ekvivalentné $f[g[h[x]]]$. Toto označenie eliminuje počet zátvoriek a zdrojový kód je čitateľnejší.)

```

WalkSolveSteps1[q_, a_, b_, c_] := Module[
  {e1, e2, e3, e4, e5, e6, p},
  e1 = q == 0;
  e2 = -c + First @ e1 == -c + Last @ e1;
  e3 = First @ e2 / a == Last @ e2 / a;
  e4 = Expand @ First @ e3 == Last @ e3;
  e5 = b ^ 2 / (4 a ^ 2) + First @ e4 ==
      b ^ 2 / (4 a ^ 2) + Last @ e4;
  e6 = Factor /@ e5;
  p = If[e1 === e2, {e1}, {e1, e2}];
  p = If[e2 === e3, p, Append[p, e3]];
  p = If[e3 === e4, p, Append[p, e4]];
  p = If[e4 === e5, p, Append[p, e5]];
  p = If[e5 === e6, p, Append[p, e6]];
  Do[Print[ p[[i]] ], {i, Length @ p}];
  e6
]

```

```

WalkSolveSteps2[x_, e6_, sign_] := Module[
  {e7, d, e8, e, e9, f, e10, p},
  e7 = PowerExpand @ Sqrt @ First @ e6 ==
  sign PowerExpand @ Sqrt @ Last @ e6;
  d = Denominator @ First @ e7;
  e8 = d First @ e7 == d Last @ e7;
  e = First @ e8 /. x -> 0;
  e9 = First @ e8 - e == Last @ e8 - e;
  f = First @ e9 /. x -> 1;
  e10 = First @ e9 / f == Last @ e9 / f;
  p = If[e7 === e8, {e7}, {e7, e8}];
  p = If[e8 === e9, p, Append[p, e9]];
  p = If[e9 === e10, p, Append[p, e10]];
  Do[Print[ p[[i]] ], {i, Length @ p}];
]

```

```
WalkSolve[q_ == 0, x_] := Module[
  {a, b, c, e6},
  {a, b, c} = Reverse @ CoefficientList[q, x];
  e6 = WalkSolveSteps1[q, a, b, c];
If[
  Last @ e6 === 0,

  (* then *)

  Print["Dostali sme koreň kvadratickej rovnice."];
  WalkSolveSteps2[x, e6, 1];
  Print["Toto je dvojnásobný koreň."],

  (* else *)

  Print["Najskôr budeme uvažovať kladný koreň."];
  WalkSolveSteps2[x, e6, 1];
  Print["Dostali sme prvé riešenie."];
  Print["Teraz zoberieme druhý koreň."];
  WalkSolveSteps2[x, e6, -1];
  Print["Dostali sme druhé riešenie."];
]
]
```

■ Použitie

```
rovnica1 = 2 - 4 x + x ^ 2
```

```
2 - 4 x + x2
```

WalkSolve[rovnica1 == 0, x]

$$2 - 4x + x^2 == 0$$

$$-4x + x^2 == -2$$

$$4 - 4x + x^2 == 2$$

$$(-2 + x)^2 == 2$$

Najskôr budeme uvažovať kladný koreň.

$$-2 + x == \sqrt{2}$$

$$x == 2 + \sqrt{2}$$

Dostali sme prvé riešenie.

Teraz zoberieme druhý koreň.

$$-2 + x == -\sqrt{2}$$

$$x == 2 - \sqrt{2}$$

Dostali sme druhé riešenie.

rovnica2 = x ^ 2 + 2 B x + C;

WalkSolve[rovnica2 == 0, x]

$$C + 2Bx + x^2 == 0$$

$$2Bx + x^2 == -C$$

$$B^2 + 2Bx + x^2 == B^2 - C$$

$$(B + x)^2 == B^2 - C$$

Najskôr budeme uvažovať kladný koreň.

$$B + x == \sqrt{B^2 - C}$$

$$x == -B + \sqrt{B^2 - C}$$

Dostali sme prvé riešenie.

Teraz zoberieme druhý koreň.

$$B + x == -\sqrt{B^2 - C}$$

$$x == -B - \sqrt{B^2 - C}$$

Dostali sme druhé riešenie.

Úloha: generujem zadania na písomku pre delenie polynómov

■ Postup od vytvorenia polynómu ku riešeniu

```
Table[a[i] * x^i, {i, 0, 6}]
```

```
{a[0], x a[1], x^2 a[2], x^3 a[3], x^4 a[4], x^5 a[5], x^6 a[6]}
```

```
pol = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 6}]]
```

```
a[0] + x a[1] + x^2 a[2] + x^3 a[3] + x^4 a[4] + x^5 a[5] + x^6 a[6]
```

```
Floor[20 * Random[Real] - 10]
```

```
3
```

```
pol = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 6}]]
```

```
Do[pol = pol /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10], {i, 0, 6}]
```

```
pol
```

```
a[0] + x a[1] + x^2 a[2] + x^3 a[3] + x^4 a[4] + x^5 a[5] + x^6 a[6]
```

```
-6 + 5 x - 5 x^2 - 2 x^3 + x^4 + 2 x^5 - 10 x^6
```

```
del = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 3}]]
```

```
Do[del = del /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10], {i, 0, 3}]
```

```
del
```

```
a[0] + x a[1] + x^2 a[2] + x^3 a[3]
```

```
8 - 8 x + 8 x^2 - 8 x^3
```

```
PolynomialQuotient[pol, del, x]
```

$$\frac{1}{8} - \frac{3x}{8} + x^2 + \frac{5x^3}{4}$$

`PolynomialRemainder[pol, del, x]`

$$-7 + 9x - 17x^2$$

Teraz to spojíme do jedného celku

```
Do[
  pol = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 4}]];
  Do[pol = pol /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
    {i, 0, 4}]; del = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 2}]];
  Do[del = del /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
    {i, 0, 2}];

Print[
  "Vydeľ nasledujúce dva polynómy"]
Print[" (", pol, " ) : (", del, " ) ="];
Print["Výsledok je: ", PolynomialQuotient[pol, del, x]];
Print["Zvyšok po delení je: ",
  PolynomialRemainder[pol, del, x]];
Print["-----"], {4}]
```

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(9 - 4x - 10x^2 + 7x^3 + 6x^4) : (2 - 6x) =$$

$$\text{Výsledok je: } \frac{19}{18} + \frac{7x}{6} - \frac{3x^2}{2} - x^3$$

$$\text{Zvyšok po delení je: } \frac{62}{9}$$

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(-5 - 5x - 4x^2 + 8x^3 + 2x^4) : (-9 + 2x^2) =$$

$$\text{Výsledok je: } \frac{5}{2} + 4x + x^2$$

Zvyšok po delení je: $\frac{35}{2} + 31x$

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(-7 - x + 8x^2 + 2x^3 - 6x^4) : (-4 - 10x - x^2) =$$

Výsledok je: $588 - 62x + 6x^2$

Zvyšok po delení je: $2345 + 5631x$

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(-5 - 10x + 9x^2 + x^3 - 2x^4) : (-3 + 4x - 9x^2) =$$

Výsledok je: $-\frac{787}{729} - \frac{x}{81} + \frac{2x^2}{9}$

Zvyšok po delení je: $-\frac{2002}{243} - \frac{4169x}{729}$

- Samozrejme, môžeme postupovať aj opačným postupom - to je pre učiteľa prirodzenejší spôsob

```
vysledok = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 4}]];
Do[vysledok = vysledok /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 4}]
vysledok
```

```
-8 - 9 x - 2 x^2 - 8 x^3
```

```
zvysok = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 2}]];
Do[zvysok = zvysok /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 2}]
zvysok
```

```
-10 + 7 x - x^2
```

```
delitel = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 3}]];
Do[delitel = delitel /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 3}]
delitel
```

$$-3 + x + 8x^2 + 7x^3$$

```
delenec = vysledok * delitel + zvy sok // Simplify
```

$$14 + 26x - 68x^2 - 106x^3 - 87x^4 - 78x^5 - 56x^6$$

Teraz to spojíme do jedného celku

```
Do[
  vysledok = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 4}]];
Do[vysledok = vysledok /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 4}];
zvy sok = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 2}]];
Do[zvy sok = zvy sok /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 2}];
delitel = Apply[Plus, Table[a[i] * x^i, {i, 0, 3}]];
Do[delitel = delitel /. a[i] -> Floor[20 * Random[Real] - 10],
  {i, 0, 3}];
delenec = vysledok * delitel + zvy sok // Simplify;

Print["Vydeľ nasledujúce dva polynómy"];
Print["(", delenec, ") : (", delitel, ")="];
Print["Výsledok je: ",
  PolynomialQuotient[delenec, delitel, x]];
Print["Zvyšok po delení je: ",
  PolynomialRemainder[delenec, delitel, x]];
Print["-----"], {4}]
```

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(10 - 35x - 4x^2 + 56x^3 - 106x^4 + 101x^5 - 52x^6 + 35x^7) : (-2 + 7x - 6x^2 + 5x^3) =$$

Výsledok je: $-8 - 6x + 8x^2 - 2x^3 + 7x^4$

Zvyšok po delení je: $-6 + 9x + 6x^2$

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(14 + 33x - 100x^2 + 24x^3 + 5x^4 - 47x^5 + 35x^6 - 25x^7) : (-2 - 7x + 9x^2 - 5x^3) =$$

Výsledok je: $-5 + 5x + 6x^2 + 2x^3 + 5x^4$

Zvyšok po delení je: $4 + 8x - 8x^2$

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(-42 + 33x - 87x^2 + 84x^3 - 86x^4 + 87x^5 - 49x^6 + 10x^7) : (9 + 6x + 7x^2 - 5x^3) =$$

Výsledok je: $-5 + 8x - 10x^2 + 7x^3 - 2x^4$

Zvyšok po delení je: $3 - 9x - 10x^2$

Vydeľ nasledujúce dva polynómy

$$(-5 - 40x + 51x^2 + 118x^3 + 107x^4 - 24x^5 - 68x^6 - 48x^7) : (-8x - 7x^2 - 6x^3) =$$

Výsledok je: $4 - 10x - 9x^2 + 2x^3 + 8x^4$

Zvyšok po delení je: $-5 - 8x - x^2$
